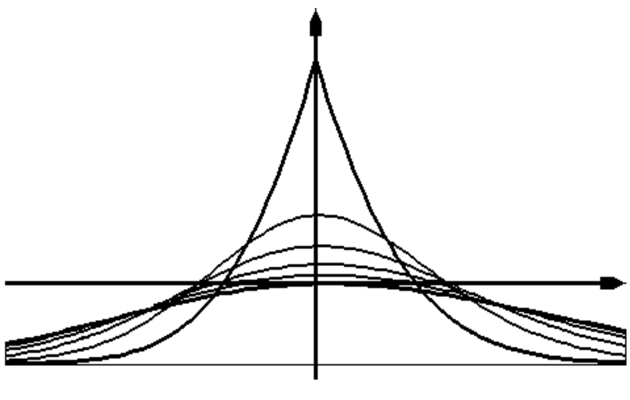
ФОНДОВАЯ БИРЖА
РТС

А.Н. Балабушкин

ОПЦИОНЫ
И
ФЬЮЧЕРСЫ

Методическое пособие



ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга содержит базовые сведения по фьючерсам и опционам, которые иллюстрируются конкретными примерами.

Актуальность темы определяется наличием ликвидного и динамично растущего срочного рынка Фондовой биржи РТС (FORTS), на котором наряду с фьючерсами торгуются и опционы – инструменты, до этого практически отсутствовавшие на российском финансовом рынке. Однако содержание пособия не «привязано» исключительно к FORTS, более того, конкретные вопросы организации торговли в FORTS здесь не рассматриваются (им посвящена брошюра [1], а также материалы на сайте www.forts.ru).

Фьючерсы и опционы являются одновременно простыми и сложными финансовыми инструментами. С одной стороны, вполне успешные спекулятивные операции с ними можно проводить на основе тех же умений и навыков, которые применяются на рынках базисных активов (акций, валюты и т.п.). С другой стороны, диапазон применений данных инструментов гораздо шире. В книге рассматриваются такие вопросы, как ценообразование фьючерсов и опционов, арбитраж, хедж, опционные стратегии, особенности срочных инструментов на фондовые индексы и другие.

Опционы - в значительной степени «объект графический», что обусловило включение в книгу большого количества рисунков (около 50). Русскоязычная терминология в данной области еще окончательно не утвердилась, поэтому появление в тексте специфических терминов сопровождается указанием на английские эквиваленты.

Александр Балабушкин
Май 2004 года

<u>ГЛАВА 1</u>. ФОРВАРДНЫЕ И ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

1.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Опционы, форвардные и фьючерсные контракты относятся к так называемым производным финансовым инструментам *(derivatives).* Финансовый инструмент называется производным, если его стоимость зависит от цены некоторого базисного актива (товара, валюты, акции, облигации), процентной ставки, фондового индекса, температуры или иного количественного показателя, в общем случае называемого основой (underlying, underlying variable). В дальнейшем более привычный термин базисный актив используется в расширительном смысле как синоним основы.

Обычно стоимость производного инструмента не определяется ценой базисного актива однозначно, а зависит также и от множества других факторов, однако влияние цены базисного актива наибольшее. Кроме того, наряду с ценовой всегда присутствует очевидная функциональная взаимосвязь базисного актива и производного инструмента. В частности, если по каким-либо причинам базисный актив перестает существовать, то это автоматически делает невозможным и обращение производного инструмента. У сложных производных инструментов базисных активов может быть несколько. Производный инструмент, в свою очередь, может выступать в роли базисного актива для другого производного инструмента.

Большинство производных инструментов относятся к срочным инструментам. Простейшим примером срочного инструмента является форвардный контракт – соглашение, по которому одна из сторон обязуется в установленный будущий день поставить, а другая сторона - оплатить определенное количество товара или финансового актива по заранее оговоренной цене. От сделки с немедленной поставкой и оплатой форвард отличается отсроченностью даты исполнения, отсюда название всего класса. Очевидно, что при достижении договоренности относительно будущей фиксированной цены каждая из сторон в значительной степени опирается на текущую цену предмета сделки, и в этом смысле форвард является производным инструментом, а объект сделки - его базисным активом.

Форвардные контракты не обязательно заключаются с целью приобретения или продажи базисного актива. Распространенной операцией является последовательное заключение форвардных контрактов сначала со стороны покупателя, а затем со стороны продавца (или наоборот). При этом контрагенты могут быть разными, но условия контракта, за исключением цены, – одинаковыми. Целью таких операций является получение прибыли на разности цен. При этом форвардные контракты как бы отрываются от предмета сделки, становясь самостоятельным финансовым инструментом. Таким образом возникли и закрепились выражения «купить форвардный контракт» и «продать форвардный контракт». В качестве цены форварда принимается цена базисного актива, по которой он должен быть поставлен и оплачен в будущем.

Минимальный интервал между датой заключения сделки и датой исполнения, при котором инструмент квалифицируется как срочный, варьируется в зависимости от базисного актива. Как правило, к срочным относятся операции, расчеты по которым отстоят от текущей даты более чем на два дня. Сделка с исполнением на второй рабочий день считается заключенной на условиях «спот». Обобщенно, для любого базисного актива спот (или наличным, кассовым) рынком называют рынок инструментов с практически немедленным исполнением.

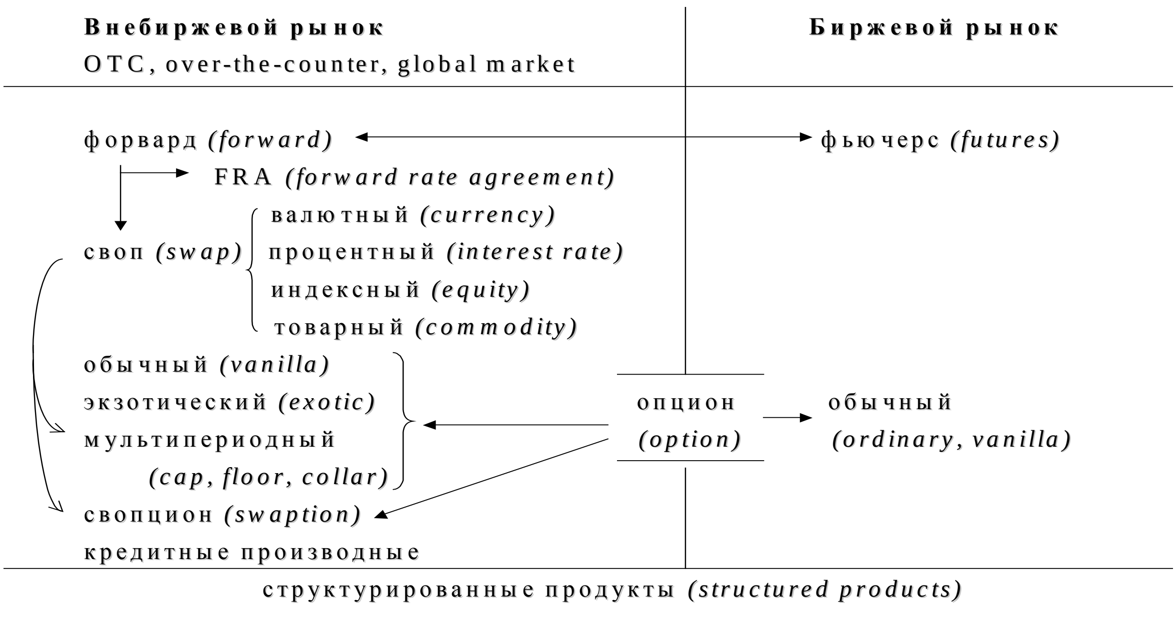


Рис. 1.1. Основные типы производных инструментов

Наряду с характеристикой, приведенной выше, даются также другие определения производных инструментов. В соответствии с одним из них, производный инструмент – это соглашение, фиксирующее права и обязанности сторон в связи с некоторым базисным активом (понимаемым расширительно, как основа). Это соглашение само по себе не означает перехода прав на базисный актив, и если такой переход прав предусмотрен, то он наступает не в момент заключения сделки по производному инструменту, а при его исполнении.

Рынок производных инструментов сегодня является важной и бурно развивающейся частью мирового финансового рынка. В этой области происходит наибольшее число инноваций, к которым применимо понятие финансовой инженерии. На рисунке 1.1 схематично изображены основные типы производных инструментов и взаимосвязи между ними. Биржевой рынок в основном представлен фьючерсами и обычными опционами, хотя в условиях усиливающейся конкуренции со стороны внебиржевого рынка биржи вводят менее традиционные для них контракты (например, структурированные продукты). Форварды, фьючерсы и обычные опционы являются как бы элементарными «кирпичиками», из которых формируются более сложные производные инструменты. Далее рассматриваются только эти простейшие производные инструменты, с другими можно ознакомиться по литературе, указанной в конце книги.

Ç Ú‡·ÎËˆÂ 1.1 ÔðË‚Â‰ÂÌ˚ Ò‚Ó‰Ì˚Â Ó·ÓðÓÚ˚ ÔÓ ·ËðÊÂ‚˚Ï Ù¸˛˜ÂðÒ‡Ï Ë ÓÔˆËÓÌ‡Ï Á‡ 2003/2002 „„. Ò ð‡Á·Ë‚ÍÓÈ ÔÓ ·‡ÁËÒÌ˚Ï ‡ÍÚË‚‡Ï. é·ð‡˘‡ÂÚ ‚ÌËÏ‡ÌËÂ ÚÓÚ Ù‡ÍÚ, ˜ÚÓ ÓÔˆËÓÌ˚ Ó·„ÓÌflÎ¸Ú Ù¸˛˜ÂðÒ˚ Í‡Í ÔÓ ‡·ÒÓÎ˛ÚÌÓÏÛ Ó·˙ÂÏÛ ÓÔÂð‡ˆËÈ, Ú‡Í Ë ÔÓ ÚÂÏÔ‡Ï Ëı ðÓÒÚ‡.

	2002	2003	Изменение
Фьючерсы	2,324.91	2,970.51	27.77%
Опционы	3,892.37	5,142.22	32.11%
Фондовые индексы	2,791.18	3,960.87	41.91%
Процентные ставки	1,478.44	1,881.27	27.25%
Отдельные акции	1,354.70	1,558.52	15.05%
С/х товары	199.39	261.15	30.98%
Энергоносители	209.37	217.56	3.91%
Металлы	71.57	90.39	26.29%
Валюта	60.56	77.85	28.53%
Драгоценные металлы	51.26	64.46	25.75%
Другие	0.8	0.66	-17.14%
Всего	6,217.28	8,112.73	30.49%

Таблица 1.1. Обороты по биржевым срочным инструментам (млн. контрактов)[1]

На рис. 1.2 показана динамика объемов торгов и открытых позиций на торгах в FORTS – срочном рынке Фондовой биржи РТС (Futures and Options on RTS[2]).

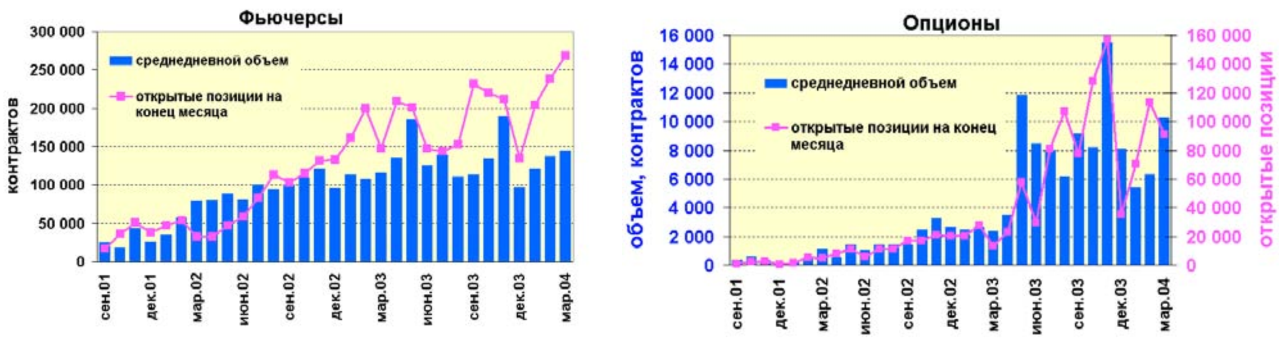


Рис. 1.2. Динамика торгов в FORTS

Основную долю оборота и открытых позиций составляют фьючерсы на отдельные акции, однако с мая 2003 года торги опционами заметно активизировались. Интересно, что фьючерсы на отдельные акции стали торговаться на биржах во всем мире сравнительно недавно (так, в США они были фактически

[1] По данным Futures Industry Association

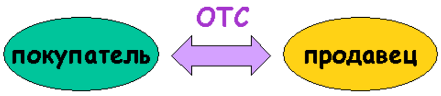
[2] «Исторически» сложилось, что в сводках торгов FORTS открытые позиции удваиваются, то есть учитываются длинные и короткие позиции, однако на рис. 1.2 даны односторонние позиции. Понятия фьючерсного, опционного контракта и открытой позиции даются в следующих разделах.

запрещены в силу действовавших правил регулирования рынка производных). По-видимому, первой такие контракты ввела в обращение Российская биржа осенью 1996 года, а Лондонская Международная биржа финансовых фьючерсов и опционов *LIFFE* первой из западных бирж запустила рынок на индивидуальные акции *Universal Stock Futures* в начале 2001 года.

1.2. ФЬЮЧЕРСНЫЙ КОНТРАКТ

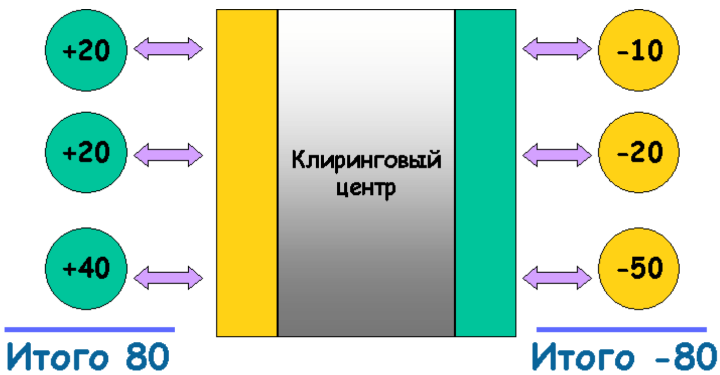
Фьючерсный контракт подобен форвардному, но торгуется на бирже по установленным биржей правилам. Суть отличий биржевой торговли от внебиржевой сводится главным образом к двум пунктам:

- условия контрактов стандартизованы по количеству и качеству подлежащего поставке базисного актива, срокам исполнения и месту поставки, а цена исполнения определяется в процессе публичных биржевых торгов. В настоящее время это чаще всего электронные торги, когда трейдеры получают информацию о ходе торгов, вводят заявки и заключают сделки либо с рабочих мест торговой системы, располагаемых непосредственно в офисах участников торгов, либо через так называемые Интернет-шлюзы;
- торговля носит «обезличенный», анонимный характер, в частности, отсутствует необходимость оценки риска невыполнения контрагентом по сделке своих обязательств. Эти функции берет на себя Клиринговая палата - подразделение биржи или самостоятельная организация, в обязанности которой входят учет заключенных сделок, денежные расчеты, о которых речь пойдет ниже, и обеспечение гарантий по исполнению контрактов. После регистрации сделки Клиринговая палата размыкает стороны в том смысле, что выступает в роли продавца для каждого покупателя контракта и в роли покупателя для каждого продавца.



Следствиями отмеченных условий торговли являются концентрация торговой активности на ограниченном количестве контрактов; большие объемы торговли; высокая ликвидность, то есть возможность быстро купить или продать большое количество контрактов без существенного влияния на рыночную цену; небольшая разность между ценами спроса и предложения.

Про покупателя фьючерсных контрактов говорят, что он открыл и имеет длинную позицию, про продавца - что он имеет короткую позицию (*long, short position).* В электронной торговой системе участник видит заявки других участников без указания того, кем подана та или иная заявка. Сделка заключается автоматически, если цены встречных заявок (на покупку и продажу) совпадают. Если у некоторого участника торгов открыта длинная позиция в 50 контрактов и он покупает дополнительно 30 контрактов, то открытая позиция становится равна 80, а если затем он продает 100 контрактов, то получает короткую позицию в 20 контрактов. При этом безразлично, с кем именно заключаются сделки. Если число открытых позиций становится равно 0, то говорят, что участник торгов закрыл позиции. В этом случае он «выходит из игры» и не несет никаких обязательств по исполнению фьючерсных контрактов. При наступлении дня исполнения контракта Клиринговая палата вновь сводит вместе покупателей и продавцов, у которых на этот момент остались открытые позиции, для организации поставки и оплаты базисного актива (общее число длинных позиций всегда равно общему количеству коротких).



В дальнейшем используется следующее соглашение: фраза «участник торгов заключил сделку объемом n контрактов» означает, что он купил n контрактов, если n положительно, и продал n контрактов, если n отрицательно; число открытых позиций OI *(open interest)* будет положительным для длинных и отрицательным для коротких позиций.

Отмеченная выше стандартизация по датам поставки означает, что одновременно на бирже торгуются контракты с вполне фиксированными датами исполнения, скажем, в период 15 января - 14 февраля это могут быть контракты с исполнением 15 февраля, 15 марта, 15 апреля. По окончании этого периода, 15 февраля, наступает дата исполнения февральского контракта и открываются торги на контракт с новой датой исполнения, в данном примере 15 мая. Месяц, а также квартал - типичные интервалы между датами исполнения контрактов, поэтому контракты часто обозначают названием соответствующего месяца. В данном примере фьючерсные контракты охватывали трехмесячный будущий период, однако характерными временными горизонтами являются год и более.

Стандартизация по датам исполнения позволяет проследить изменение цены определенного, например, июньского, контракта от сделки к сделке в течение всего срока обращения этого фьючерса. Биржа ежедневно на основании данных о заключенных в этот день сделках определяет для каждого фьючерсного контракта его расчетную цену или цену закрытия *(settlement price* или *closing price).* Процедура выведения расчетной цены варьируется от биржи к бирже. Например, может использоваться цена последней сделки или вычисляться средневзвешенная цена за определенный период. Далее учитываются цены спроса и предложения на момент окончания торговой сессии. Если последняя цена спроса больше F, то в качестве расчетной цены принимается цена спроса; если последняя цена предложения меньше F, то берется цена предложения. Если F располагается между ценами покупателя и продавца, то оказывается расчетной ценой.

Ежедневная биржевая сводка содержит расчетные цены контрактов с различными сроками исполнения, объем торгов и число открытых позиций. Объем торгов подсчитывается как сумма контрактов во всех сделках данного торгового дня с разбивкой по месяцам поставки, а число открытых позиций определяется как сумма открытых позиций на конец дня всех участников торгов, имеющих длинные открытые позиции по данному месяцу исполнения (или короткие, что одно и то же). Подобная информация за определенный период, отображенная в графическом виде, является исходной при принятии решений на основе методов технического анализа.

В таблице 1.2 в качестве примера приведены основные параметры спецификации фьючерсного контракта на обыкновенные акции ОАО «Газпром», торгуемого в FORTS.

Базисный актив	Обыкновенные именные бездокументарные акции ОАО «Газпром»
Объем контракта	100 акций
Месяцы исполнения	Последний месяц каждого квартала
Последний день обращения	Последний рабочий день, предшествующий 15 числу месяца исполнения
Цена контракта	Цена (курс) контракта в процессе торгов указывается в рублях за 100 акций
Шаг цены	1 руб. за 100 акций
День исполнения	Биржевой день, следующий за последним днем обращения контракта
Способ исполнения	Поставка / оплата через биржевой рынок акций РТС

Таблица 1.2. Пример спецификации поставочного фьючерсного контракта

1.3. СПОСОБЫ РАСЧЕТА ПО ФОРВАРДНЫМ И ФЬЮЧЕРСНЫМ КОНТРАКТАМ

Сопоставим сделки на спот-рынке с форвардными и фьючерсными сделками с точки зрения движения денежных средств. В качестве предмета сделки на спот-рынке возьмем акцию. При покупке акции необходимо сразу заплатить контрагенту ее цену, а в момент покупки фьючерсного, как и форвардного, контрактов ничего платить не нужно. Если котировка акции растет, то владелец акции может продать акцию и немедленно получить в итоге разницу между ценой продажи и ценой покупки. Пока акция не продана, потенциальные прибыли владельца акции от роста ее курсовой стоимости могут быть оценены, но остаются нереализованными (при падении курсовой стоимости речь идет о нереализованных убытках).

Если предположить, что форвардный контракт ликвиден и покупатель контракта может в любой момент продать такой же контракт, закрыв позицию и зафиксировав тем самым свои прибыли/убытки, то форвардный контракт аналогичен акции. Однако все расчеты откладываются до дня исполнения контракта.

Как отмечалось, фьючерсный контракт в сущности представляет собой тот же форвардный контракт. Одно из существенных различий между ними заключается в способах расчета прибылей/убытков. Поясним это на примере.

<u>Пример 1.1.</u> Пусть 7 июня 2002 года были заключены форвардный и фьючерсный контракты на поставку 100 акций Газпрома со сроком исполнения 17 июня 2002 года по цене 3350 рублей за 100 акций.

Курс, по которому акции продавались в конце каждой торговой сессии, и расчетная цена фьючерсного контракта изменялись по дням так, как указано в таблице 1.3 (здесь и далее символ @ означает «по цене»).

Дата, июнь 2002 г.			7	10	11	13	14	17
Цена закрытия акций			3301	3392	3401	3444	**3330**	
Расчетная цена фьючерса			3360	3339	3386	3435	**3340**	
Прибыли - убытки	форвард @ 3350							-20
	фьючерс @ 3350	за день	10	-21	47	49	-95	-10
		итого	10	-11	36	85	-10	-20

Таблица 1.3. Сопоставление расчетов по форварду и фьючерсу

Пусть условия форвардного контракта предусматривают завершение расчетов по поставке и оплате акций утром 17 июня, до начала торговой сессии. Если считать, что существенного скачка в цене акций между закрытием торговой сессии 14 июня и открытием 17 июня не происходит, то для оценки выгодности форвардного контракта его цену можно сопоставлять с ценой пакета акций на конец торговой сессии 14 июня, которая оказалась равна 3330. Для покупателя форвардный контракт оказался невыгодным, поскольку на дату исполнения контракта приобрести акции можно было по лучшему курсу. Если покупатель продаст полученный в результате исполнения форвардного контракта пакет акций в тот же день – 17 июня, то его убыток составит 3350-3330=20 рублей. С другой стороны, если продавец контракта приобретет 100 акций 14 августа непосредственно перед поставкой и затем осуществит поставку по оговоренной в контракте цене, то получит прибыль в 20 рублей.

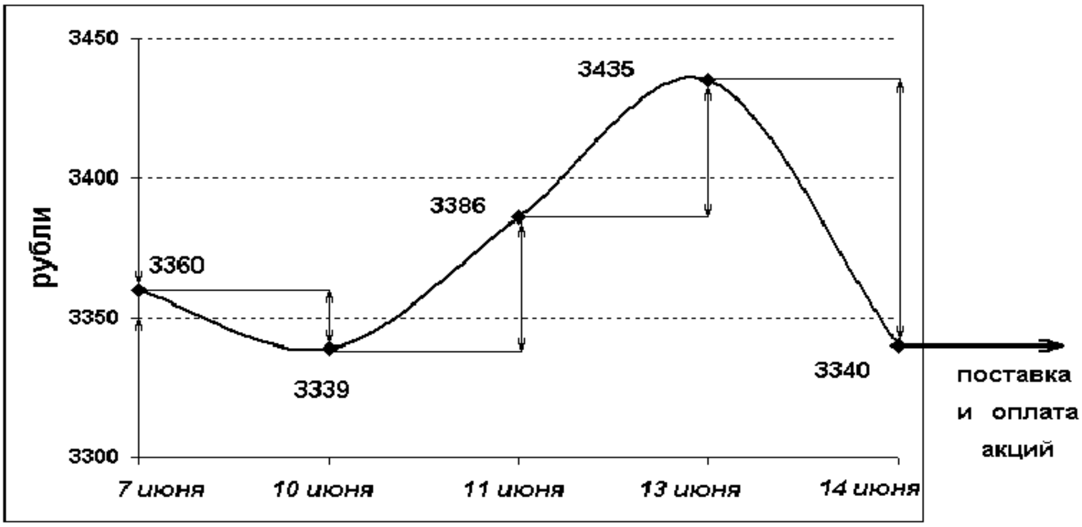


Рис. 1.2. Расчеты по фьючерсу с поставкой базисного актива

Для покупателя фьючерсного контракта ситуация отличается тем, что в день заключения сделки или предварительно он обязан перечислить на свой счет, который открывает ему биржа (Клиринговая палата), определенную сумму, как минимум равную так называемой начальной марже – гарантийному обеспечению (подробнее об этом в главе 13). По итогам дня биржа в ходе клиринговой сессии определяет расчетную цену фьючерса и немедленно начисляет на счет покупателя разность между расчетной ценой и ценой, по которой был куплен фьючерс, а в последующие дни - разность между текущей расчетной ценой и расчетной ценой предыдущего торгового дня. Отрицательная величина означает текущие убытки, которые списываются со счета. После начисления/списания средств цена исполнения фьючерсного контракта для каждого участника торгов, имеющего открытые позиции по данному контракту, становится равна текущей расчетной цене. Эта процедура называется корректировкой позиций по рынку *(mark-to-market).*

Как следует из таблицы 1.3, покупатель получит 7 июня 10 рублей, так как расчетная цена фьючерса в этот день оказалась выше цены заключения сделки, на следующий день выплатит 21 рубль в связи с падением фьючерсной цены и т.д. К 14 апреля в результате ежедневных выплат покупатель окажется в убытке на 10 рублей. На следующий день за поставленный пакет акций он будет платить 3340 рублей. Поскольку это дороже рыночной цены пакета на 10 рублей, окончательный убыток окажется равен тем же 20 рублям, что и в случае форвардного контракта. Рассматривая операцию по покупке и исполнению фьючерсного контракта в целом, видим, что пакет акций обошелся покупателю в те же 3350 рублей, на которые он рассчитывал в момент заключения контракта.■

Если сравнивать фьючерсный контракт и акции, то покупатель акций немедленно оплачивает их цену, а при открытии фьючерсной позиции цена лишь фиксируется без уплаты или получения денег. При изменении курсовой стоимости акций владелец имеет потенциальные прибыли/убытки, не выражающиеся в виде каких-либо платежей до момента продажи акций, а открытая фьючерсная позиция влечет за собой ежедневные начисления/ списания средств по мере изменения расчетной цены. Окончательный же результат как в случае продажи акций, так и в случае закрытия фьючерсной позиции равен разности между ценой продажи и ценой покупки - если временно отвлечься от вопросов, связанных с процентными ставками.

В общем случае, когда в течение торговой сессии один участник торгов совершает последовательно ряд сделок по определенному фьючерсному контракту по ценам $F_1, F_2, ..., F_m$ объемами $n_1, n_2, ..., n_m$, причем на конец предыдущего дня его открытая позиция равнялась OI_{-1}, а расчетные цены предыдущего и этого дня равны F_{-1}, F соответственно, то прибыли/убытки V по итогам текущего дня составляют:

$$V = OI_{-1}*(F_1-F_{-1})+(OI_{-1}+n_1)*(F_2-F_1)+...+(OI_{-1}+n_1+n_2+...+n_m)*(F-F_m)=$$

$$= OI_{-1}*(F-F_{-1})+n_1*(F-F_1)+...+n_m*(F-F_m) = OI*F-(OI_{-1}*F_{-1}+n_1*F_1+...+n_m*F_m), \qquad (1.1)$$

где $OI = OI_{-1}+n_1+n_2+...+n_m$ - новая открытая позиция на конец дня. Первая из этих формул представляет собой сумму членов, каждый из которых является произведением текущей открытой позиции на интервал изменения цены, в котором сохранялась эта открытая позиция. Вторая формула показывает, что сделки можно рассматривать раздельно, причем открытая позиция предыдущего дня OI_{-1} аналогична вновь проведенным сделкам, если считать ее совершенной по цене F_{-1}. При этом порядок заключения сделок несущественен. Последнюю строку проще было бы интерпретировать, если бы речь шла о сделках с акциями: эта строка показывает увеличение или уменьшение общей стоимости портфеля по отношению к цене его приобретения. Во фьючерсной торговле цена приобретения является лишь условной точкой отсчета, относительно которой определяется реальная прибыль (убыток), то есть расчеты ведутся в дифференциалах.

В приведенном примере цена фьючерса указывалась за 100 акций. Более распространен вариант котирования фьючерсного контракта не за весь объем поставляемого по контракту базисного актива, а за единицу – за один доллар США для 1000-долларового контракта, за один баррель для контракта на нефть объемом 1000 баррелей, и т.п. В этом случае результат формулы (1.1) необходимо умножать на объем контракта, то есть на 1000 в приведенных примерах.

1.4. ВАРИАЦИОННАЯ МАРЖА

Прибыли/убытки текущего дня по фьючерсной позиции, определяемые формулой (1.1), называются вариационной маржей *(variational margin* или *settlement variation)*. Введение процедуры ежедневной корректировки по рынку фьючерсных позиций одновременно решает несколько задач.

Во-первых, так технически проще организовать учет позиций. Вместо многообразия пар покупатель-продавец и цен индивидуальных сделок после корректировки позиций по рынку остаются лишь два показателя, определяющие будущие права и обязанности сторон (покупателей, продавцов и «размыкающей» их Клиринговой палаты): последняя расчетная цена фьючерсного контракта и число открытых позиций каждого участника.

Во-вторых, при открытии фьючерсных позиций и их последующем закрытии разность цен покупки и продажи немедленно оказывается начисленной на счет/ списанной со счета участника торгов, после чего он не несет никаких обязательств по этим сделкам.

В-третьих, и это самое важное, вариационная маржа является составной частью системы гарантий, применяемой биржей (Клиринговой палатой) для обеспечения исполнения всеми участниками торгов своих обязательств. Необходимость в таких мерах вызвана тем, что сделки по срочным контрактам несут повышенный риск неисполнения контракта одной из сторон по сравнению со сделками на спот-рынке, когда поставка и оплата базисного актива происходят практически в тех же рыночных условиях, при которых был заключен контракт.

Для сравнения вернемся вновь к форвардному контракту. При оценке потенциальных прибылей/убытков по форвардному контракту естественно использовать его текущую цену, которая - в первом приближении - является рыночным прогнозом цены базисного актива на день исполнения. Очевидным свойством форвардной цены является ее сближение с ценой базисного актива на наличном рынке по мере уменьшения оставшегося до даты исполнения контракта времени («конвергенция»). Если бы этого не происходило, то были бы возможны так называемые арбитражные сделки, то есть безрисковые прибыльные сделки, использующие дисбаланс цен и процентных ставок. Например, если накануне дня исполнения форвардная цена занижена относительно спот-цены настолько, что падение спот-цены на следующий день до этого уровня крайне маловероятно, то можно купить форвардный контракт накануне, оплатить базисный актив в день исполнения по цене контракта и немедленно продать по спот-цене, получив прибыль (подробнее о такого рода операциях речь идет в главе 4). Таким образом, разность $F - E$, где F - текущая форвардная цена, E - цена заключенного ранее форвардного контракта, может служить оценкой потенциальной прибыльности или убыточности форвардного контракта. По мере приближения даты исполнения F сходится к S_T, где S_T - спот-цена базисного актива в день исполнения контракта. Разность же $S_T - E$ и является реальной прибылью (убытком) по форвардному контракту.

Один из способов уменьшить риск неисполнения форвардного контракта либо смягчить последствия этого состоит в том, чтобы обязать сторону, имеющую потенциальные убытки в период между заключением и исполнением контракта, внести другой стороне или некоторому посреднику залог на сумму текущих убытков и увеличивать залог по мере роста убытков. В случае отказа от исполнения форвардного контракта стороной, имеющей потенциальные убытки, залоговые средства переходят в собственность другой стороны. В биржевой фьючерсной торговле эта процедура модифицирована таким образом, что вместо увеличения или уменьшения залоговой суммы происходит ежедневный перевод денег непосредственно со счета на счет с одновременным изменением цены исполнения контракта. Если участник торгов в какой-то день не выполняет обязательств по вариационной марже, то на следующий день его позиции принудительно закрываются во избежание дальнейшего накопления убытков.

Процедура принудительного закрытия обычно включает несколько этапов. Вначале неплательщику предоставляется возможность участвовать в торгах, выставляя заявки исключительно на закрытие позиций. Если в течение оговоренного правилами времени закрытыми оказываются не все позиции, то данный участник отстраняется от торгов, а заявка автоматически формируется торговой системой. Потери по позиции, которые могут возникнуть из-за неблагоприятного движения цены в процессе закрытия, покрываются начальной маржей, которая является еще одной составной частью биржевой системы гарантий по срочным сделкам (подробнее об этом в главе 13).

1.5. РАСЧЕТНЫЕ КОНТРАКТЫ

По договоренности сторон вместо поставки базисного актива исполнение срочного контракта может быть сведено к простому перечислению между сторонами некоторой суммы, если обе стороны сочтут это более удобным и согласуют размер суммы. В том случае, когда спот-рынок данного базисного актива достаточно ликвиден и существует механизм, позволяющий определить единую для всех участников торгов «объективную» цену базисного актива, возникает возможность использовать эту цену в день поставки для проведения окончательных расчетов прибылей/убытков между всеми участниками форвардных или фьючерсных сделок, заранее оговорив это в условиях контракта. Такая цена называется ценой исполнения или окончательной расчетной ценой фьючерсного контракта, а контракт называется расчетным (беспоставочным).

Примером расчетного фьючерса является контракт на курс доллара США, торгуемый в РТС.

Базисный актив	Доллар США
Объем контракта	1000 долларов
Месяцы исполнения	Последний месяц каждого квартала
Последний день обращения	Последний рабочий день, предшествующий 15 числу месяца исполнения
Цена контракта	Цена (курс) контракта указывается в рублях за 1000 долларов
Шаг цены	1 руб. за 1000 долларов
День исполнения	Биржевой день, следующий за последним днем обращения контракта
Окончательная расчетная цена	Средневзвешенный курс USD/RUB_UTS_TOD[3], сложившийся в день исполнения контракта на торгах долларом США по итогам единой торговой сессии (ЕТС) межбанковских валютных бирж
Способ исполнения	Перечисление вариационной маржи по окончательной расчетной цене

Таблица 1.4. Пример спецификации расчетного фьючерсного контракта

Для фьючерса на курс доллара США аналог примера 1.1 выглядел бы следующим образом.

Пример 1.2. Пусть 4 декабря 2003 года были заключены беспоставочные форвардный и фьючерсный контракты на 1000 долларов США со сроком исполнения 15 декабря 2003 года по цене 29733 рубля за 1000 долларов. Расчетная цена фьючерсного контракта и курс доллара (округленный с точностью до копеек и умноженный на 1000) изменялись по дням так, как указано в таблице 1.5.

[3] То есть средневзвешенный курс на торгах доллар/рубль с расчетами в день торгов (today)

Дата			5	8	9	10	11	15
Курс USD/RUB_UTS_TOD			29640	29550	29560	29540	29450	**29390**
Расчетная цена фьючерса			29685	29550	29582	29546	**29470**	
Прибыли - убытки	форвард @ 29733							**-343**
	фьючерс @ 29733	за день	-48	-135	32	-36	-76	-80
		итого	-48	-183	-151	-187	-263	**-343**

Таблица 1.5. Сопоставление расчетов по форварду и фьючерсу без поставки

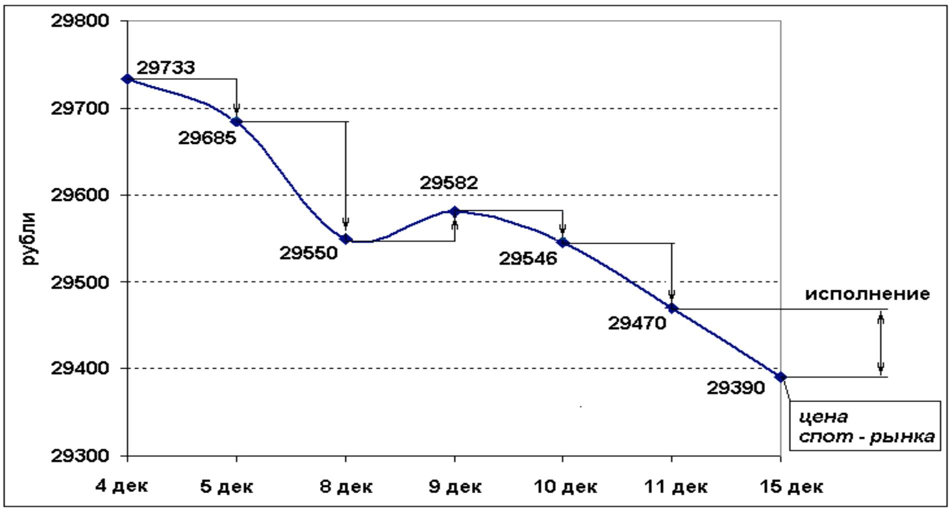


Рис. 1.3. Расчеты по фьючерсу без поставки базисного актива

Так как цена, по которой происходит окончательный расчет по форвардному контракту (29390), меньше контрактной цены (29733), то покупатель форварда выплатит 15 декабря продавцу 29733-29390=343 рубля, и на этом контракт будет считаться исполненным. Для сторон фьючерсного контракта до 11 декабря включительно ежедневные расчеты будут осуществляться по расчетным ценам фьючерса, а последний расчет 15 декабря будет проведен по окончательной расчетной цене, которая берется уже не из фьючерсного рынка, а из спотового. Последняя вариационная маржа равна 29390-29470=-80, после чего контракты считаются исполненными. Общий итог по длинной фьючерсной позиции равен тем же –343 рублям, что и по длинной форвардной позиции.

В общем случае графически прибыли/убытки покупателя форвардного или фьючерсного контракта в зависимости от цены базисного актива на день исполнения контракта S_T изображаются прямой (рис. 1.4, где сокращенная запись $+1\,F@5000$ обозначает один форвардный контракт на покупку по цене 5000). Прибыли/убытки продавца контракта равны и противоположны по знаку (рис. 1.5).

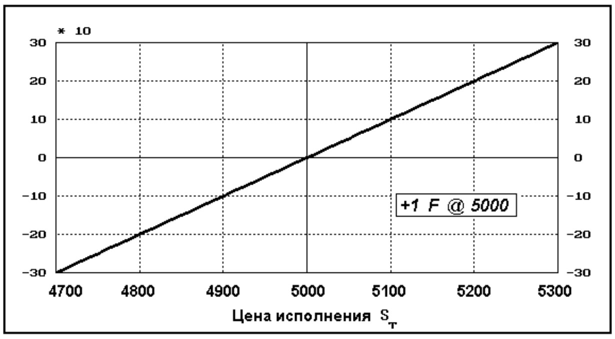


Рис. 1.4. Прибыли/убытки по длинной форвардной позиции

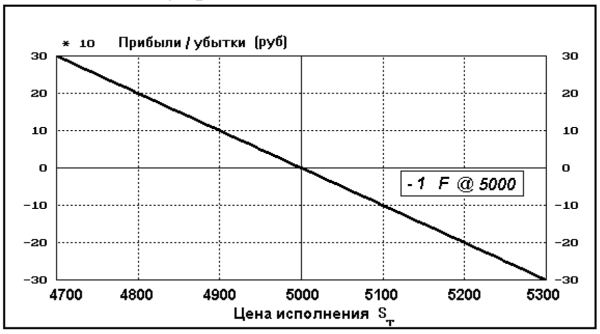


Рис. 1.5. Прибыли/убытки по короткой форвардной позиции

Очевидно, что в случае, когда в качестве базисного актива выступает некоторый индекс (фондовый индекс, процентная ставка, температура и т.п.), срочный инструмент может быть только беспоставочным.

<u>ГЛАВА 2.</u> ОПЦИОНЫ - ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. ОПЦИОНЫ КОЛЛ И ПУТ

Различают два типа опционов. Опцион колл *(call)* предоставляет одной из сторон контракта, именуемой держателем опциона *(holder),* право купить базисный актив в указанный срок в будущем по фиксированной цене - цене исполнения опциона, которая носит также название страйковой цены или просто страйка *(strike).* Опцион пут *(put)* дает право держателю опциона продать базисный актив в указанный срок в будущем по страйковой цене. Опцион колл называют также опционом на покупку, а опцион пут - опционом на продажу. Для держателя опциона право на покупку или продажу не является обязательством, то есть он может не использовать это право (*option* в переводе с английского означает выбор, право выбора). Очевидно, что держателю опциона колл будет невыгодно использовать свое право, если к наступлению указанного срока рыночная спот-цена базисного актива окажется ниже страйка; в случае опциона пут ситуация противоположная. Возможность отказа не распространяется на другую сторону опционного контракта, которая обязана совершить покупку или продажу базисного актива по страйковой цене, если держатель опциона решает реализовать свое право.

2.2. ПРЕМИЯ ПО ОПЦИОНУ

Ясно, что стороны опционного контракта, в отличие от сторон форвардного и фьючерсного контрактов, находятся в несимметричном положении. Это обстоятельство компенсируется тем, что держатель опциона в момент заключения контракта платит другой стороне определенную сумму - цену опциона, которую принято называть также премией по опциону. Величина премии является предметом торга в процессе заключения сделки. Термины «держатель опциона» и «покупатель опциона» используются как взаимозаменяемые. Про продавца опциона говорят также, что он выписал или подписал опцион *(writer).*

Заметим, что функции сторон в случае исполнения опциона пут меняются на противоположные: покупатель опциона становится продавцом базисного актива, а продавец опциона - покупателем базисного актива. В этой связи во избежание разночтений иногда уточняется, что в том или ином контексте понимается под длинной позицией по опциону пут. Здесь во всех без исключения случаях считается, что длинная позиция - это позиция покупателя контракта (форвардного, фьючерсного, опциона колл, пут). Используют также следующую терминологию: различают позицию по срочному контракту и возникающую при этом рыночную позицию. Последняя является длинной, если при увеличении цены базисного актива стоимость позиции возрастает, и короткой в противном случае. Забегая вперед, можно сказать, что рыночная позиция определяется знаком коэффициента дельта Δ (глава 9). Как будет видно из дальнейшего, для опциона пут позиция по контракту и рыночная позиция противоположны, то есть длинная позиция по опциону пут является в то же время короткой рыночной позицией.

2.3. ЕВРОПЕЙСКИЕ И АМЕРИКАНСКИЕ ОПЦИОНЫ

Данные выше определения относятся к европейским опционам *(European-style).* Американские опционы *(American-style)* отличаются тем, что держатель может реализовать свое право на покупку/продажу базисного актива в любой момент, не дожидаясь наступления даты истечения срока действия опциона (даты экспирации – *expiry date*). Данная терминология не имеет отношения к географическому месту совершения сделки. Биржевые опционы чаще являются американскими, внебиржевые - европейскими.

Продавец американского опциона колл должен в любой момент быть готов поставить базисный актив, а продавец опциона пут - оплатить базисный актив. Если продавец опциона колл - и европейского, и американского - имеет в наличии базисный актив, на который продан опцион, то такая позиция называется опционом колл с покрытием *(covered call),* в противном случае - без покрытия *(naked call).*

2.4. КЛАССЫ И СЕРИИ ОПЦИОНОВ

Классом опционов называются все опционы с одним базисным активом, причем опционы колл и пут образуют различные классы. Серией опционов называются опционы определенного класса с одной датой экспирации и одним страйком.

Страйки, по которым ведется торговля, для биржевых опционов устанавливаются биржей в соответствии с правилами торговли. Обычно выбирается некоторый фиксированный шаг страйка. В день открытия торгов опционами с новой датой экспирации определяется центральный страйк - страйк, наиболее близкий к текущей цене базисного актива. Затем от центрального страйка отсчитываются равные количества страйков вверх и вниз, скажем, по 5, и полученные $2*11=22$ серии выставляются на торги. Впоследствии по мере движения цены базисного актива центральный страйк смещается, и тогда добавляются новые серии опционов так, чтобы сверху и снизу от центрального страйка всегда было не менее оговоренного в правилах числа страйков (5 в данном примере).

2.5. ГРАФИКИ ПРИБЫЛЕЙ/УБЫТКОВ ПО ОПЦИОНАМ НА ДАТУ ЭКСПИРАЦИИ

Как и форвардные или фьючерсные контракты, опционы могут не предусматривать поставку реального базисного актива, а быть расчетными. Сумма, которую продавец опциона должен выплатить покупателю в случае исполнения европейского опциона, равняется $S_T - E$ в случае опциона колл и $E - S_T$ в случае опциона пут, где S_T - спот-цена базисного актива, по которой осуществляется расчет, E - страйк. Предполагается, что эти разности положительны, так как иначе держателю нет смысла исполнять опцион. Объединяя случаи исполнения и неисполнения опциона, получаем, что держателю европейского расчетного опциона колл в день экспирации продавец выплатит

$$C_T = \max \ (S_T - E, 0), \tag{2.1}$$

а держателю опциона пут -

$$P_T = \max \ (E - S_T, 0). \tag{2.2}$$

Эти функции в зависимости от S_T называются функциями выплат, а соответствующие графики – линиями выплат. Их можно интерпретировать также как стоимости опционов на дату экспирации. Ясно, что и стоимости опционов с поставкой базисного актива определяются теми же соотношениями.

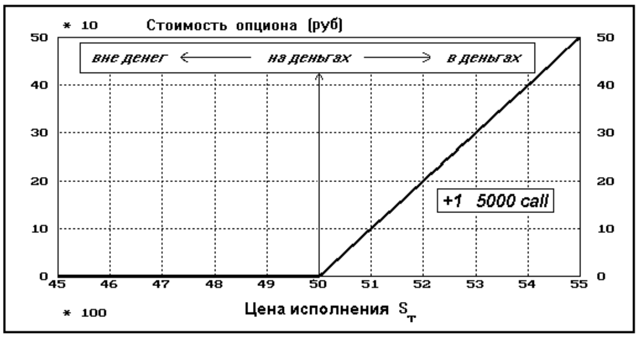


Рис. 2.1. Стоимость опциона колл на дату экспирации

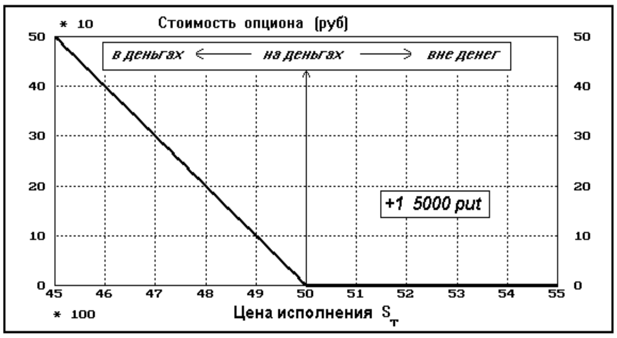


Рис. 2.2. Стоимость опциона пут на дату экспирации

Американские опционы к моменту истечения срока действия не отличаются от европейских, поэтому выражения (2.1), (2.2) к ним также применимы. Однако для американских опционов рис. 2.1, 2.2 содержат дополнительную информацию: они показывают минимальную границу для цены опциона в любой из предыдущих моментов, если по горизонтальной оси вместо S_T откладывать текущую цену базисного актива S. Действительно, если в какой-то момент цена американского опциона оказывается ниже графика, то возможен арбитраж: покупка опциона и его немедленное исполнение.

► Чему равна прибыль от этой операции?◄

Величина, изображаемая графиками рис. 2.1, 2.2, но в зависимости от текущей стоимости базисного актива S, для европейского и американского опционов называется внутренней стоимостью *(intrinsic value).* Тем самым выше речь шла о том, что в условиях, когда цена американского опциона оказывается ниже его внутренней стоимости, возникает возможность для арбитража.

Если текущая цена базисного актива опциона колл больше страйка, то говорят, что опцион «в деньгах» *(in-the-money),* если меньше, то «вне денег» *(out-of-the-money),* и если равна страйку - то «на деньгах» *(at-the-money).* Для опциона пут слова больше и меньше в предыдущем определении следует поменять местами. Можно также сказать, что опцион в деньгах, если его внутренняя стоимость положительна. Выражение «опцион на деньгах» часто употребляют в расширительном смысле, понимая под этим опцион на центральном страйке, то есть ближайшем к цене базисного актива (иногда говорят «вблизи денег» – *near-the-money*). В дальнейшем будут также употребляться выражения «глубоко в деньгах», «глубоко вне денег» (*deep in-the-money, deep out-of-the-money*), которые относятся к ситуации значительного отличия цены базисного актива от страйка в ту или иную сторону.

Ясно, что смысл этих специфических выражений скорее геометрический, чем «денежный». К ним легко привыкнуть, воспринимая как удобные обозначения соотношений цены базисного актива и страйка, от чего, как будет видно из дальнейшего, существенно зависят качественные свойства опционов. Обычно данные термины просто оставляются без перевода в языках, использующих латинский алфавит.

Рис. 2.3, 2.4 - зеркальные отображения рис. 2.1, 2.2 - показывают суммы, которые платит продавец расчетного опциона при его исполнении.

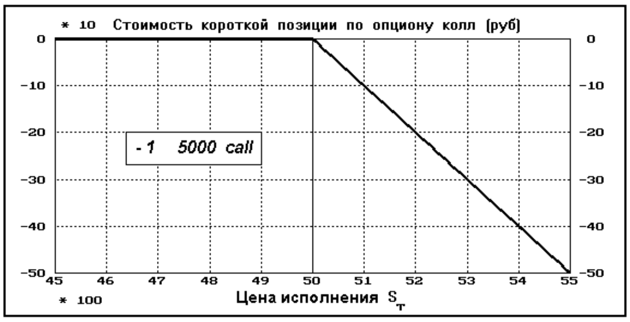


Рис. 2.3. Стоимость короткой позиции по опциону колл на дату экспирации

Рис. 2.4. Стоимость короткой позиции по опциону пут на дату экспирации

Для того чтобы оценить прибыльность или убыточность всей операции по покупке и возможному исполнению опциона, необходимо учесть предварительно уплаченную покупателем премию *C* или *P*, понизив весь график на эту величину (рис. 2.5, 2.6). Сокращение «+1 5000 call @ 100» означает один купленный за 100 опцион колл на страйке 5000. Прибыли/убытки продавца опциона равны и противоположны.

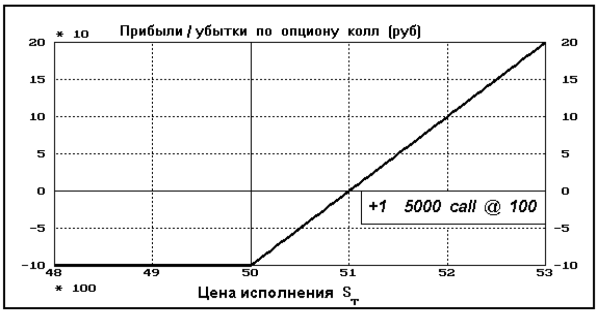


Рис. 2.5. Прибыли/убытки покупателя опциона колл на дату экспирации

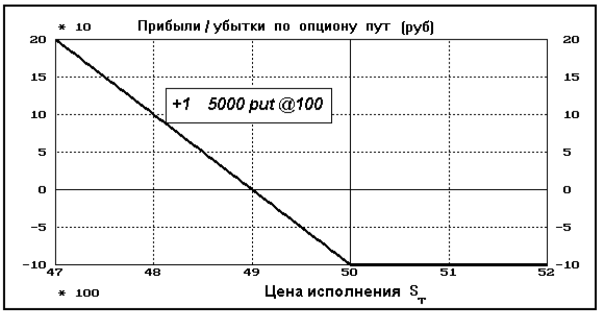


Рис. 2.6. Прибыли/убытки покупателя опциона пут на дату экспирации

Длинные позиции в данных примерах оказываются выигрышными правее точки 5100 для опциона колл и левее точки 4900 для опциона пут. Эти точки называются точками безубыточности *(breakeven points)*. Важным свойством длинных позиций по опционам является ограниченность возможных потерь размером уплаченной премии. При операциях только с фьючерсными контрактами возможность ограничения убытков прямо связана с ликвидностью контракта и плавностью движения цены, однако всегда остается риск резкого скачкообразного изменения цены в неблагоприятную сторону. Опционы позволяют строить позиции с ограниченными потерями при любом исходе.

Если трейдер имеет в своем портфеле купленные и проданные опционы в различных количествах и на различных страйках, но с одной датой экспирации, то прибыли/убытки на день экспирации изображаются графиком, который получается простым поточечным суммированием указанных элементарных графиков. Первый этап знакомства с опционами обычно состоит в том, чтобы научиться суммировать графики и уметь до совершения сделки представить себе, к какому изменению графика это приведет (естественно, с этой задачей хорошо справляется компьютер). Полезным на стадии начального обучения оказывается анализ реальных котировок опционов с целью перебора различных вариантов сделок и выявления свойств возникающих при этом позиций.

Выделяют несколько стандартных спрэдов и комбинаций опционов, имеющих специальные названия, которые дают представление о разнообразии возможных графиков прибылей/ убытков. Реальные позиции часто более сложны и не подпадают под эту классификацию. Существенно, однако, что стратегии, основанные на графиках такого типа, сводятся к прогнозированию цены базисного актива на дату экспирации и построению позиции, которая лежит в положительной области для ожидаемых на эту дату значений цены базисного актива. Дополнительным соображением является соотнесение потенциальной прибыли и риска потерь в случае ошибочного прогноза. Недостатком подобных стратегий является их привязка к дате экспирации и, как следствие, некоторая статичность: график ничего не говорит о текущей стоимости портфеля и тенденциях ее изменения. Для учета этих факторов и применяется количественная теория стоимости опционов, которой в основном посвящена данная книга. Упомянутые выше стандартные спрэды и комбинации опционов перечислены в главе 11.

В действительности переход от рисунков 2.1, 2.2 к рисункам 2.5, 2.6 простым вычитанием премии неявно содержит некоторое упрощение, поскольку моменты уплаты премии и получения той или иной суммы не совпадают и необходимо учитывать процентную ставку для пересчета предварительно уплаченной премии к дате экспирации. Упрощенный способ представления ожидаемых прибылей/убытков достаточно распространен в тех случаях, когда процентные ставки и/или сроки малы.

2.6. ОПЦИОН НА ФЬЮЧЕРСНЫЙ КОНТРАКТ

Практически все фьючерсные контракты, торгуемые на западных биржах, а также наиболее ликвидные фьючерсы в FORTS снабжены еще одной «производной надстройкой» - опционами, в которых базисным активом является данный фьючерсный контракт. Это означает, что если покупатель решает исполнить опцион, ему открывается фьючерсная позиция с ценой исполнения, равной страйку. По опциону колл открывается длинная фьючерсная позиция, по опциону пут - короткая. Для продавца опциона открывается противоположная фьючерсная позиция. Более точно, процедура обработки уведомлений об исполнении биржевых опционов *(exercise notice)* заключается в следующем:

- Клиринговая палата по завершении торговой сессии проверяет наличие длинных открытых позиций в данной серии опционов у подателя уведомления об исполнении опционов;
- открытые позиции по опционам заменяются на соответствующие фьючерсные позиции;
- среди позиционных счетов (портфелей), содержащих на данный момент короткие позиции в той же серии опционов, в соответствии с некоторым алгоритмом (например, методом случайного поиска) выбирается один или несколько, в которых вместо опционных открываются фьючерсные позиции, противоположные позициям покупателя, в сумме на то же количество контрактов;
- как для подателя уведомления об исполнении опционов, так и для выбранных контрагентов по открытым фьючерсным позициям начисляется (списывается) вариационная маржа.

<u>Пример 2.1.</u> Пусть участник торгов 29 мая 2002 года купил июньский 4500 put @ 100, когда цена базисного фьючерса была равна 4550. Если 4 июня он решает исполнить опцион и подает соответствующее уведомление в Клиринговую палату, то Клиринговая палата подбирает контрагента с короткой позицией в той же серии опционов. Расчетная цена июньского фьючерса 4 июня оказалась равной 4200. Держателю опциона открывается короткая фьючерсная позиция с ценой исполнения 4500, затем ему на счет начисляется 300 рублей в качестве вариационной маржи и позиция считается скорректированной по рынку, то есть имеющей цену исполнения 4200. Для контрагента открывается длинная фьючерсная позиция и с его счета списывается 300 рублей. При этом опционные позиции, естественно, ликвидируются.■

Встречаются несколько вариантов сочетаний опционов и фьючерсов.

1) Расчетные фьючерсы и расчетные европейские опционы на один базисный актив с одним сроком исполнения. В этом случае фьючерсы и опционы торгуются параллельно, однако ввиду окончательного расчета по одному и тому же значению индекса эти позиции составляют единый портфель и должны рассматриваться совместно. Опционы, которые на дату экспирации оказываются в деньгах, при этом исполняются автоматически.

2) Расчетные фьючерсы и опционы на эти фьючерсы.

    a. Если опционы европейские, то это по сути предыдущий вариант, поскольку в день экспирации по опционам в деньгах вначале будут открыты фьючерсные позиции по страйковым ценам, а затем по фьючерсам будет осуществлен окончательный расчет и позиции будут ликвидированы. Результат равен внутренней стоимости опциона, то есть тому же, что было бы получено по опциону непосредственно на базисный актив. Хотя вариант 1 выглядит проще, встречаются примеры опционных спецификаций именно в варианте 2a.

    b. В случае американских опционов для держателей длинных позиций добавляется дополнительная возможность исполнения опциона в течение срока его действия. Соответственно, продавцы опционов должны быть готовы к тому, что их опционные позиции будут заменены на фьючерсные. Случаи, когда целесообразно исполнять опцион, достаточно редки: досрочное исполнение опциона держателем по сути приводит к тому, что вместо права выбора он получает твердое обязательство покупки или продажи в будущем базисного актива по той же страйковой цене, чем сужает свои возможности. При этом теряется так называемая временнáя стоимость опциона (об этом ниже).

3) Поставочные фьючерсы и опционы на эти фьючерсы. Дата экспирации таких опционов предшествует дате исполнения фьючерсов по крайней мере на несколько дней. Это необходимо для того, чтобы за несколько дней до поставки снять неопределенность относительно исполнения или неисполнения

опционов. После даты экспирации опционов каждый участник точно знает, сколько открытых фьючерсных позиций он имеет и у него остается время скорректировать позиции в зависимости от того, собирается ли он «выходить на поставку» и в каком объеме. Автоматического исполнения опционов в деньгах не происходит, то есть держатели, которые хотят исполнить опционы, всегда должны подавать соответствующие уведомления. Иногда предусматривается автоматическое исполнение опционов, которые в деньгах на определенную величину. Например, если эта величина составляет 50 рублей, расчетная цена фьючерса в день экспирации опционов 4560, то опцион колл на страйке 4500 в деньгах на 60 и будет автоматически исполнен, если от держателя не поступил отказ от автоматического исполнения.

По схеме организованы фьючерсные контракты на акции ОАО «Газпром» (см. таблицу 2.1) и опционы на эти фьючерсы в FORTS. Краткая спецификация опциона имеет вид:

Базисный актив	Фьючерс на обыкновенные именные бездокументарные акции ОАО «Газпром»
Тип	Колл и пут
Вид	Американский
Объем контракта	1 фьючерсный контракт
Месяцы исполнения	Те же, что и по базисному фьючерсу
Последний день обращения	
Цена контракта	
Шаг цены	
Шаг страйка	500 рублей (на 100 акций)
Истечение срока действия	Закрытие торговой сессии, после которой остается два торговых дня по базисному фьючерсу
Исполнение	Покупатели могут исполнить опционы в любой день, подав заявление о востребовании прав по опционам. Автоматическое исполнение в дату экспирации не предусмотрено.

Таблица 2.1. Пример спецификации опциона на поставочный фьючерс

2.7. СПОСОБЫ РАСЧЕТА ПО ОПЦИОНАМ

Опционы, по которым покупатель выплачивает продавцу премию непосредственно в момент заключения сделки, в дальнейшем будут именоваться опционами с уплатой премии. В английском варианте такой способ расчета называется *stock-type settlement*, что дословно можно перевести как «акционный» тип расчетов; употребляется также выражение *up front premium method*. При этом опцион торгуется аналогично любой другой ценной бумаге. Если на некоторый базисный актив торгуются только опционы (нет параллельно торгуемых фьючерсов), то такой способ расчетов выглядит вполне естественным. Проблемы возникают при использовании этого типа расчетов в случае, когда опционы торгуются вместе с фьючерсами в любом из вариантов, перечисленных в предыдущем разделе. В качестве иллюстрации выберем одну из комбинаций опционов - синтетический фьючерс.

Рассмотрим для определенности опционы в варианте 2а предыдущего раздела. Синтетический фьючерс представляет собой длинную позицию по опциону колл и короткую позицию по опциону пут на том же страйке E, скажем, $E = 4900$. Из графика видно, что линия выплат по данной позиции представляет собой прямую, проходящую через 4900 (эта линия не учитывает премии по опционам, иначе ее надо сместить на величину разности премий *P-C*). Точнее эту позицию следовало бы назвать синтетический форвард, поскольку при сохранении этой позиции до даты экспирации расчеты происходят один раз – при исполнении опционов. Предположим, что одновременно с занятием длинной синтетической фьючерсной позиции продается «обычный» фьючерс по цене $F = 5100$. Суммарная линия выплат представляет собой горизонтальную линию на уровне $F - E = 200$, то есть окончательный результат данной операции не зависит от цены исполнения контрактов – цены базисного актива на дату исполнения. Данная комбинация, называемая реверсией, а также противоположная - конверсия, могут использоваться для получения арбитражной прибыли, если премии по опционам на одном страйке и фьючерсная цена разбалансированы, в данном примере при условии $C - P \neq F - E = 200$.

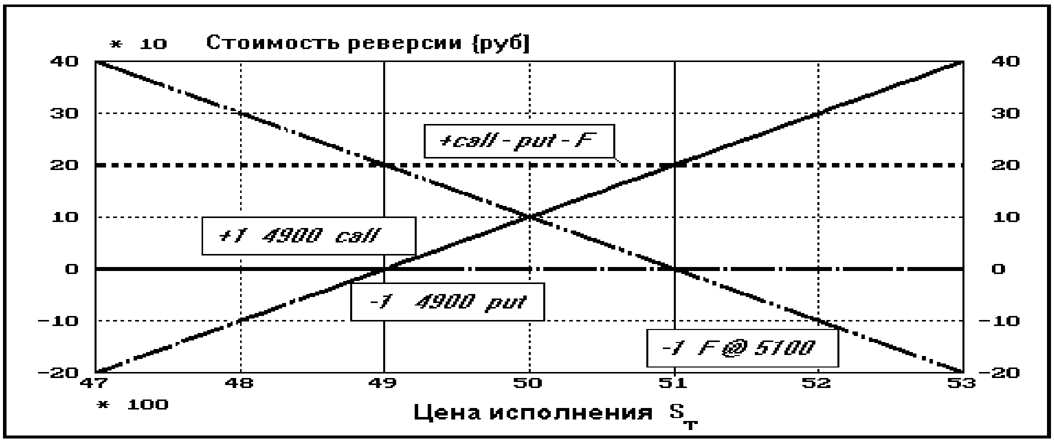


Рис. 2.7. Стоимость реверсии на дату экспирации опционов

Упомянутая выше проблема заключается в том, что несмотря на горизонтальный график портфеля на момент экспирации и, казалось бы, вполне определенный окончательный результат, при значительном росте фьючерсной котировки в период между открытием позиций и датой экспирации по «настоящему» фьючерсу необходимо выплачивать вариационную маржу, а по синтетическому фьючерсу прибыли будут лишь потенциальными (нереализованными). Если в какой-то момент средств на выплату вариационной маржи не хватит, то придется закрывать позиции. Принудительные операции редко бывают прибыльными, тем более что разбалансированность, на которой основана эта арбитражная стратегия, обычно мала.

Аналогичная ситуация имеет место в так называемых синтетических опционах, например, при синтетическом опционе колл - сумме длинной позиции по опциону пут и длинной фьючерсной позиции - неожиданные с точки зрения суммарного графика неприятности могут возникнуть при падении фьючерсной котировки. Кроме того, одной из часто применяемых опционных стратегий является динамический хедж, подробно рассматриваемый ниже, при котором рыночные позиции по опционам и фьючерсам оказываются противоположными. Если при этом потери по фьючерсам не компенсируются немедленно эквивалентными приобретениями по опционам и наоборот, то средства, необходимые для поддержания таких позиций, существенно возрастают, что уменьшает доходность операций.

Примеры можно продолжить, но суть их сводится к тому, что имеет место нестыковка способов расчета по опционам и фьючерсам. Для того чтобы преодолеть эту трудность, были введены опционы без уплаты премии, или опционы с фьючерсной системой расчетов - *futures-type settlement* или *variation margining.* Первой такую систему применила Лондонская Международная биржа финансовых фьючерсов и опционов - *LIFFE (the London International Financial Futures and Options Exchange*), и эту систему называют также системой *LIFFE.* Такой способ расчета для опционов на фьючерсы в настоящее время принят на большинстве фьючерсных бирж.

Суть расчетов без уплаты премии состоит в том, что расчеты ведутся «в дифференциалах», как и по фьючерсам. Величина премии при заключении сделки только фиксируется, однако перечисления этой суммы от покупателя к продавцу не происходит. Биржа по итогам дня аналогично расчетной цене фьючерса определяет и расчетные цены для каждой серии опционов. Расчетные цены выводятся не только для тех серий, где были сделки, но и для остальных серий, по которым есть открытые позиции. Процедура меняется от биржи к бирже, некоторые возможные подходы к этой проблеме будут ясны из главы 10 (например, использование так называемой матрицы волатильностей). Расчеты по открытым опционным позициям проводятся так же, как и по фьючерсам, то есть в процессе клиринга происходит сравнение зафиксированной премии с расчетной ценой этого дня для данной серии и корректировка позиции по рынку; в дальнейшем корректировка по рынку проводится ежедневно по расчетным ценам опциона.

Пример 2.2. Пусть 13 числа месяца исполнения фьючерсного контракта на акции РАО «ЕЭС России», за два дня до даты экспирации опционов, участник торговли покупает опцион колл с ценой исполнения 5600 рублей по цене 25 рублей. Если расчетная цена данной серии опционов по итогам этого торгового дня равняется 35 рублям, то вариационная маржа составит 35-25=10 рублей (рис. 2.8, где F_{13} обозначает расчетную цену по фьючерсу этого дня). Если на следующий день расчетная цена по той же серии опционов равна 42, то вариационная маржа этого дня составит 42-35=7 рублей, а суммарная вариационная маржа за два дня достигнет 17 рублей.

Пусть 15 числа - в дату экспирации опционов - цена исполнения базисного фьючерса равна 5650. Тогда опцион в деньгах на 5650-5600=50 рублей, и окончательный расчет по опциону сводится к начислению вариационной маржи в размере 50-42=8 рублей. Суммарная вариационная маржа с момента покупки опциона составляет 25 рублей. Это соответствует значению графика прибылей/убытков по длинной позиции по опциону колл в точке 5650. Если бы расчеты происходили обычным способом, с уплатой премии, то в момент заключения сделки покупатель заплатил бы 25 рублей в качестве премии, а при исполнении получил бы 50 рублей. Итоговый результат при этом тот же, что и в способе без уплаты премии, но во времени платежи распределяются по-разному.

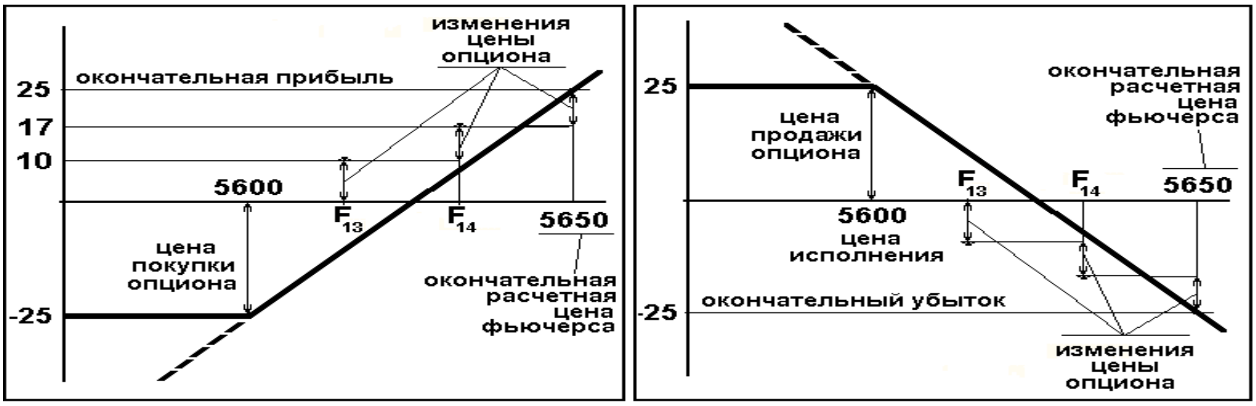


Рис. 2.8. Вариационная маржа по опциону без уплаты премии

Если бы окончательная расчетная цена по базисному фьючерсу оказалась меньше цены исполнения опциона 5600, то последняя вариационная маржа составила бы 0-42=-42 рубля. Соответственно, суммарные убытки с момента покупки опциона были бы равны 25 рублям, то есть равны премии, с которой была заключена сделка по опциону. Как и при расчетах с уплатой премии, убытки покупателя опциона никогда не могут превысить величины премии, при этом потенциальные прибыли не ограничены.■

Рассмотренная в примере 2.1 процедура досрочного исполнения американского опциона на фьючерс с уплатой премии может, в частности, преследовать цель немедленного получения покупателем внутренней стоимости опциона в виде денежных средств - вариационной маржи по открытому взамен опциона фьючерсному контракту. Обратной стороной этого положительного эффекта является потеря «страховки» (ограничения возможных потерь), так как график прибылей/убытков из ломаной типа изображенных на рис. 2.1, 2.2 превращается в прямую линию. Для опционов на фьючерс без уплаты премии подобный стимул досрочного исполнения опциона отсутствует, поскольку рост стоимости опциона немедленно реализуется в денежных выплатах, а досрочное исполнение, как будет показано ниже, лишь приводит к потере так называемой временно́й составляющей премии. Тем не менее ситуации, когда такая операция имеет смысл, не исключаются. В частности, может оказаться, что с целью закрытия позиций удобнее исполнить опционы глубоко в деньгах и закрыть более ликвидные фьючерсные позиции.

Если держатель опциона без уплаты премии решает исполнить опцион и подает соответствующее уведомление в Клиринговую палату, то обработка этого уведомления отличается от описанной в разделе 2.6 процедуры дополнительной операцией: со счета держателя списывается сумма, равная текущей расчетной цене опциона. Это связано с тем, что при исключении из портфеля опциона портфель дешевеет на эту величину. Можно также не вводить эту дополнительную операцию, но считать, что фьючерсная позиция открывается следующим образом: в случае опциона колл по цене $E+C$, в случае опциона пут с ценой исполнения $E-P$, где E - страйк, C, P - расчетные цены опционов того дня, в который происходит исполнение опционов. Далее эти фьючерсные позиции обычным образом корректируются по рынку.

<u>Пример 2.3.</u> Пусть накануне дня экспирации опцион колл на страйке 5000 был куплен за 100, расчетная цена фьючерса оказалась равна 5105, а расчетная цена в данной серии опционов 110. Если опцион исполняется в этот день, то последовательность операций следующая:

- начисляется вариационная маржа по опциону 110-100=10;
- ликвидируется позиция по опциону и со счета списывается 110 рублей;
- открывается длинная фьючерсная позиция по цене 5000;
- по открытой фьючерсной позиции начисляется вариационная маржа в размере 5105-5000=105 рублей.

Итого общие прибыли/убытки по итогам дня составляют 10-110+105=5 рублей. Эта величина является значением графика вида 2.5 для прибылей/убытков по опциону 5000 колл @ 100 в точке 5105 - текущей фьючерсной расчетной цене.■

Проверим, что и в общем случае, если пренебречь разновременностью платежей, оба способа расчетов – с уплатой премии и без уплаты премии - приводят к одному результату. Пусть опцион колл с уплатой премии на страйке E был куплен с премией C. Если опцион не исполняется вплоть до дня экспирации, то прибыли/убытки по опциону составят $-C$; если он исполняется в один из дней до дня экспирации включительно, то держатель в результате коррекции фьючерсных позиций по рынку получает $F-E$

(первоначально фьючерсные позиции открываются по страйковой цене E), а суммарные прибыли/убытки на этот день оказываются равны $F - E - C$, то есть изображаются рис. 2.5.

В случае опциона без уплаты премии предположим, что расчетные цены опциона в день заключения контракта и в последующие дни, вплоть до последнего дня торговли опционом, равны C_1, C_2, ..., C_m. Если опцион не исполняется, то $C_m = 0$ и суммарная вариационная маржа равна

$$(C_1 - C) + (C_2 - C_1) + \ldots (C_m - C_{m-1}) = C_m - C = -C,$$

то есть тому же, что и ранее. Если опцион исполняется в некоторый k-тый день, $k \le m$, то результат на этот день равен

$$(C_1 - C) + (C_2 - C_1) + \ldots + (C_k - C_{k-1}) + (F - E - C_k) = F - E - C,$$

что опять-таки совпадает с приведенным выше выражением для опционов с уплатой премии. В случае опциона пут выкладки аналогичны.

Опционы без уплаты премии на первый взгляд могут показаться более сложными, чем более традиционные - с уплатой премии, однако в действительности такой способ расчетов не только снимает указанные выше нестыковки в денежных расчетах, но, как будет видно из дальнейшего, и упрощает формулы для теоретической стоимости опционов.

В таблице 2.1 приведена типичная ежедневная биржевая сводка по итогам торгов опционами на фьючерсы. В ней указаны расчетные цены для опционов с ближайшими тремя месяцами поставки. Кроме того, под таблицей обычно даются объемы торгов и количество открытых позиций отдельно по опционам колл и пут.

	колл			***пут***		
страйк	**октябрь**	**ноябрь**	**декабрь**	**октябрь**	**ноябрь**	**декабрь**
4300	223	.....	.....	23	.....	.....
4350	184	226	.....	34	76	.....
4400	149	195	227	49	95	127
4450	118	166	200	68	116	150
4500	91	140	175	91	140	175
4550	69	117	152	119	167	202
4600	51	98	131	151	198	231

Таблица 2.9. Расчетные цены опционов

► Можно ли сделать какие-либо выводы относительно фьючерсной цены при таких ценах опционов? (Указание: см. рассуждения в связи с рис. 2.7).◄

2.8. КЛАССИФИКАЦИЯ ОПЦИОНОВ

Подводя итоги данной главы, классифицируем опционы следующим образом:

- по типу опциона – колл или пут;
- по виду опциона – европейский или американский;
- по базисному активу – акции, валюта, фьючерсы;
- по типу расчетов – с уплатой премии или без уплаты премии.

Акция как базисный актив будет рассматриваться в двух вариантах - как бездивидендная и дивидендная. Первое означает, что за время действия опциона выплата дивидендов не ожидается, во втором случае будет предполагаться, что заранее точно известны даты выплаты и величины дивидендов.

Результаты для акций допускают также следующее расширительное толкование. Бездивидендная акция выступает как представитель класса базисных активов, обладающих свойствами: владение этим активом, с одной стороны, не дает никаких денежных поступлений за время действия опциона, а с другой, не требует расходов по хранению, страховке и т.п. Дивидендный случай описывает класс базисных активов, владение которыми сопровождается дискретными поступлениями денежных средств.

Валюта обобщает класс активов, владение которыми сопровождается увеличением количества единиц этого базисного актива пропорционально временному промежутку и известной скорости прироста (ставке процента по валюте). Форварды, фьючерсы и опционы на валюту допускают двоякую интерпретацию в силу специфики базисного актива. Например, опцион колл на поставку долларов за рубли можно интерпретировать как опцион пут на продажу рублей за доллары.

Наконец, существуют классы базисных активов, владение которыми связано с необходимостью денежных выплат, например, за хранение товара, либо с уменьшением единиц актива со временем.

Результаты для этих случаев формально получаются простой заменой соответствующих знаков в выражениях, полученных для дивидендной акции или валюты, поэтому отдельно эти классы рассматриваться не будут.

Поскольку опционы без уплаты премии существуют только для опционов на фьючерсы, всего имеется 8 возможных комбинаций. Принципиальный подход к оценке стоимости опциона одинаков во всех этих случаях, однако конкретные выражения получаются разными. Примем следующие соглашения: C^{aec} будет обозначать стоимость опциона колл на акции, европейского, с уплатой премии; $P^{фаб}$ - стоимость опциона пут на фьючерс, американского, без уплаты премии, и т.д.

Известная формула Блэка-Шоулса была первоначально получена для C^{aec}, P^{aec} (Fischer Black, Myron Scholes, 1973). В следующей главе описывается рыночная модель, использованная при выводе этой формулы. Следует отметить, что несмотря на обилие работ по этой теме классическая формула Блэка-Шоулса в силу ее простоты и эффективности остается широко применяемой на практике профессиональными трейдерами.

ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЙ

3.1. НЕПРЕРЫВНО НАЧИСЛЯЕМАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

При выводе формулы для теоретической стоимости опционов необходимо задаться какой-то количественной моделью тех условий, в которых совершаются операции с опционами. При этом неизбежно приходится делать ряд упрощающих предположений. Одно из ключевых связано с процентными ставками и состоит в следующем. Вводится понятие безрисковой процентной ставки, единой для всех участников торгов и одинаковой как для привлечения, так и для размещения средств. Кроме того, считается, что временная структура процентных ставок удовлетворяет условию: если $R_i = R(T_i)$ - годовые процентные ставки для некоторого набора периодов $T_i < 1$ (время в долях года), выраженные в виде простого процента, то существует единая величина r такая, что

$$e^{rT_i} = 1 + R_i T_i \tag{3.1}$$

для всех *i*. Из этого следует, в частности, что если для некоторого периода T задана процентная ставка $R = R(T)$, то для любого кратного периода $T_n = nT$ процентная ставка $R_n = R(T_n)$ однозначно определяется по правилу сложных процентов:

$$e^{nrT} = (e^{rT})^n = (1 + RT)^n = 1 + R_n T_n = e^{rT_n}.$$

Можно также сказать, что при расчете эффективной годовой процентной ставки R^{eff} по формуле сложных процентов на основании заданных простых процентных ставок $R_i = R(T_i)$ всегда получается одинаковый результат: $R^{eff} = e^r - 1$. Это предположение, с одной стороны, не лишено оснований и по крайней мере приближенно часто выполняется; с другой, позволяет отвлечься от вопросов, связанных с «короткими» и «длинными» деньгами, поскольку специфические вопросы, связанные с опционами, сами по себе достаточно сложны.

Геометрический смысл параметра r, который называется непрерывно начисляемой процентной ставкой *(continuously compounded interest rate)*, показан на рис. 3.1. Здесь для наглядности параметр r рассчитывается для 6-месячной процентной ставки $R = 200\%$ и оказывается равен $r = 140\%$. Экспонента e^{rt} подобрана так, чтобы пройти через точку *A* на прямой $1 + Rt$, а прямая $1 + rt$ - касательная к этой экспоненте в нуле. Смысл непрерывно начисляемой процентной ставки сводится к тому, что для малых T (на практике для одного дня, а в пределе для бесконечно малых T) величина r дает простой годовой процент, а для больших периодов по предположению рост денежных средств удовлетворяет формуле сложных процентов, то есть происходит непрерывная капитализация дохода.

Экспоненциальная форма представления сложных процентов удобна с математической точки зрения и широко используется в теоретических выкладках при определении стоимости опциона. Также записываются и окончательные результаты. Интересно, однако, что эти выражения (по крайней мере те из них, которые будут встречаться ниже) всегда содержат параметр r в готовых комбинациях e^{rT} и e^{-rT}, которые при расчетах можно просто заменить соответственно на правую часть (3.1) и

$$e^{-rT} = \frac{1}{1 + RT}. \tag{3.2}$$

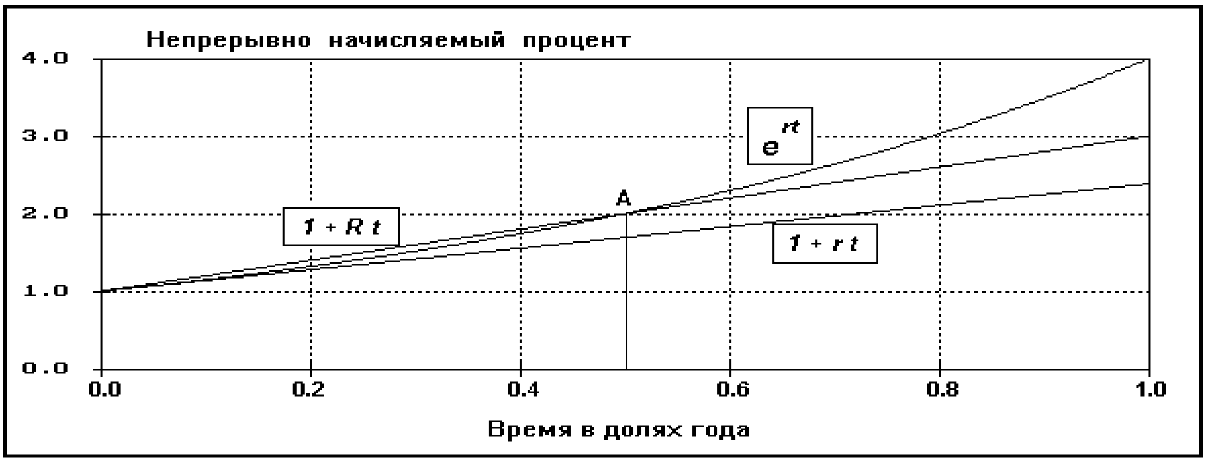


Рис. 3.1. Непрерывно начисляемый процент для 6-месячной ставки R=200%

Еще одно предположение, используемое при выводе формулы стоимости опциона, состоит в том, что за время существования опциона процентная ставка r будет постоянной. Принципиально рассуждения не меняются, если считать, что будущая динамика процентной ставки r в этот период заранее известна.

Вообще говоря, непрерывно начисляемый процент применяется и в тех случаях, когда предположение (3.1) о временной структуре процентных ставок не выполняется. Тогда необходимо указывать, для какого периода T задан процент r, представляющий собой просто другую форму записи процента R. Процентные ставки r для различных периодов T легко сравнивать, поскольку большему r соответствует бóльшая годовая эффективная процентная ставка.

3.2. МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНЫ БАЗИСНОГО АКТИВА

Для определенности будем говорить об опционах на фьючерсы и обозначать текущую фьючерсную цену символом F, однако под F можно понимать текущую цену любого базисного актива. Предполагается, что динамика цены базисного актива в течение торговой сессии описывается некоторым непрерывным случайным процессом, причем и между сессиями скачков цены не происходит. Не вдаваясь в математические подробности, связанные с корректным представлением непрерывных случайных процессов, примем более простое и наглядное описание цены как дискретного процесса с некоторым временным шагом τ : $F_0 = F$, F_1 , F_2 , ... , F_m . Шагом может быть один день, одна неделя, один час, 15 мин и т.д. Шаг будет выражаться в долях года, причем поскольку процесс «существует» только в течение торговых сессий, то 1 год считается равным в среднем 252 рабочим дням, и если, например, шаг по времени равен одному дню (типичный случай), то

$$\tau = \frac{1}{252}.$$

Дискретная модель движения цены описывается уравнением

$$\frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k-1}} = \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k, \tag{3.3}$$

где слева стоит относительное изменение цены, а справа:

- μ - средняя скорость тренда цены, выраженная как простой годовой процент;
- σ - волатильность *(volatility)*;
- $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ - последовательность гауссовских независимых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Первое слагаемое справа при отсутствии второго и достаточно малом интервале τ задает экспоненциальный рост или снижение цены по формуле

$$F(t_k) = F_k = Fe^{\mu t_k}, \tag{3.4}$$

где $t_k = k\tau$, что имеет аналогию с выражениями предыдущего раздела при замене r на μ. Второе слагаемое описывает случайные колебания цены относительно траектории ее среднего роста или снижения. Разброс случайных возмущений ξ_i стандартизован и определяется единичной дисперсией, а влияние их на цену регулируется параметром σ. Таким образом, модель (3.3) содержит как прогнозируемую составляющую изменения цены, так и ее непредсказуемые колебания, а волатильность является характеристикой размаха этих колебаний. Волатильность обычно указывается в процентах. Типичными значениями σ на товарных и фондовых рынках являются 15 - 30% и более.

Модель (3.3) при $\tau \to 0$ переходит в модель непрерывного изменения цены, которая в некотором отношении проще, так как дает более компактные результаты. Если использовать эту модель для прогноза цены в определенный будущий момент t , то $F(t)$ имеет так называемое логнормальное распределение со средним

$$\overline{F(t)} = Fe^{\mu t}, \tag{3.5}$$

а разброс цены относительно среднего $F(t) - \overline{F(t)}$ характеризуется среднеквадратическим отклонением (СКО)

$$\sigma_{F(t)} = \overline{F(t)}\sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1} \cong \overline{F(t)}\sigma\sqrt{t}. \tag{3.6}$$

Последняя аппроксимация тем точнее, чем меньше $\sigma\sqrt{t}$ по сравнению с $\overline{F(t)}$. Логнормальное распределение, в отличие от нормального, несимметрично и целиком лежит в положительной области. Чем меньше $\sigma\sqrt{t}$ по сравнению с $\overline{F(t)}$, тем ближе логнормальное распределение к нормальному со средним

$\overline{F(t)}$ и СКО $\sigma_{F(t)}$. Поэтому в первом приближении вероятность того, что $F(t)$ окажется в определенном интервале с центром $\overline{F(t)}$, может быть определена на основании хорошо известных свойств гауссовского распределения.

Интервал относительно $\overline{F(t)}$	Вероятность
$\pm\sigma_{F(T)}$	70%
$\pm 2\sigma_{F(T)}$	95%
$\pm 3\sigma_{F(T)}$	99.7%.

Более точно эти интервалы могут быть определены на основании следующего свойства $F(t)$: случайная величина $\ln F(t)$ имеет нормальное распределение со средним $\ln\overline{F(t)} - 0.5\sigma^2 t$ и СКО $\sigma\sqrt{t}$.

Если в (3.6) взять $t = 1$ - один год, то $\sigma_{F(t)} \cong \overline{F(t)}\sigma$. Тем самым в первом приближении волатильность можно интерпретировать как СКО цены через один год, выраженное как процент от ожидаемого среднего значения. Если $t = 1/252$ - один день, то $\sigma_{F(t)} \cong F\frac{\sigma}{16}$. При цене базисного актива $F = 5000$ и волатильности $\sigma = 40\%$ распределение цены на следующий день имеет относительное СКО 40/16=2.5%, а в терминах цены 5000*2.5%=125 рублей.

В разделе 3.1 и в данном временные интервалы T измеряются по-разному. В предыдущем разделе, где речь шла о процентных ставках, для определения T необходимо было взять полное количество дней и отнести его к 365, а в данной необходимо количество рабочих дней делить на 252. Небольшое различие, которое при этом возникает, часто игнорируется, однако для уточнения приводимых в дальнейшем формул теоретической стоимости опционов рекомендуется использовать первый способ в выражениях rT и второй способ в выражениях μT, $\sigma\sqrt{T}$.

3.3. ТИПЫ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В главе 5 будет показано, что парадоксальным на первый взгляд образом теоретическая стоимость опциона не зависит от скорости тренда μ цены базисного актива. Для оценки стоимости опциона важно спрогнозировать волатильность цены базисного актива σ в будущий период до момента экспирации опциона. Различают 4 типа волатильности:

- истинную будущую волатильность;
- историческую волатильность *(historical volatility);*
- прогноз на определенный будущий период;
- опционную волатильность[4] *(implied volatility).*

Истинная будущая волатильность - это то, что хотелось бы знать сегодня, но что станет известно только по прошествии данного периода.

Историческая волатильность определяется по ценам базисного актива в некоторый предшествующий период времени. Для того чтобы получить оценку параметров μ, σ по дискретному набору цен базисного актива $F_0 = F, F_1, F_2, \ldots, F_m$, необходимо определить относительные изменения цены за период τ

$$u_1 = \frac{F_1 - F_0}{F_0}, \quad u_2 = \frac{F_2 - F_1}{F_1}, \ldots, \quad u_m = \frac{F_m - F_{m-1}}{F_{m-1}},$$

рассчитать среднюю скорость тренда

$$u = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{m},$$

а затем вычислить оценку волатильности для периода τ

$$\delta = \sqrt{\frac{(u_1 - u)^2 + (u_2 - u)^2 + \ldots + (u_m - u)^2}{m - 1}}. \qquad (3.7)$$

Используя обычную терминологию, можно сказать, что волатильность δ - это СКО случайных величин $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Оценки коэффициентов μ, σ получаются нормированием:

$$\mu = \frac{u}{\tau}, \qquad \sigma = \frac{\delta}{\sqrt{\tau}}. \tag{3.8}$$

Для прогнозирования волатильности часто используется следующий прием. Задавшись некоторой шириной окна w, например, в 20 точек (20 рабочих дней или 1 месяц), «скользят» этим окном по имеющейся записи цены базисного актива. Для попадающих в окно точек определяются μ и σ, которые отображаются на графике для даты, являющейся правым краем окна (то есть процедура построения этих графиков аналогична построению графика скользящего среднего, применяемого в техническом анализе). Эти данные могут быть использованы в качестве ориентира для прогнозирования волатильности на будущий период. При этом рекомендуется сначала выбрать ширину окна w порядка длины прогнозируемого периода, а затем проанализировать графики для других значений этого параметра. Как и при прогнозе динамики цены базисного актива, для предсказания волатильности привлекается разнообразный арсенал методов фундаментального и технического анализа, а также то, что можно назвать «чувством рынка».

Одним из наблюдений о поведении волатильности базисных активов на относительно стабильных западных рынках является возврат к среднему *(reversion to the mean).* Различные базисные активы характеризуются средними значениями волатильности, которые являются весьма устойчивыми в том смысле, что графики исторической волатильности на длительном временном интервале испытывают колебания вверх и вниз относительно этих средних значений.

О последнем виде волатильности речь подробно пойдет в главе 10, однако здесь определить ее можно как расчетный параметр, который необходимо подставить в формулу для теоретической стоимости опциона, чтобы при фиксированных остальных параметрах (цене базисного актива, страйке, времени до экспирации, процентной ставке) получить заданное значение премии. Иными словами, если прямое назначение теоретических формул - давать стоимость опциона в зависимости от различных ценообразующих факторов, то для определения опционной волатильности необходимо решить обратную задачу - по заданной премии, с которой была совершена реальная сделка, рассчитать соответствующую волатильность. По графикам опционной волатильности также строятся прогнозы, причем возврат к среднему здесь тоже имеет место.

3.4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ *EWMA, GARCH*

Если в (3.7) положить $u = 0$ и использовать упрощенный вариант этой формулы:

$$\delta^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2}{m}, \tag{3.9}$$

то отличие результатов, как правило, пренебрежимо мало. Отдельные наблюдения u_i^2 в (3.9) суммируются с одинаковыми весами. Обобщением этого выражения является

$$\delta^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i^2, \tag{3.10}$$

где

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \tag{3.11}$$

а величина V имеет смысл долговременного среднего для величины δ^2 и вводится для учета тенденции возврата волатильности к среднему. Для того чтобы точнее отслеживать динамику волатильности, недавним наблюдениям u_i^2 обычно придается больший вес, чем отстоящим дальше по времени от текущего момента.

Одним из наиболее часто упоминаемых и используемых в настоящее время способов оценки волатильности является *GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity),* в котором используется рекуррентный вариант соотношения (3.10). Предположим, что с течением времени в каждый дискретный момент t_k вычисляется своя оценка волатильности δ_k^2. В наиболее распространенном методе *GARCH(1,1)* по оценке δ_{k-1}^2 и последнему наблюдению u_k^2 новая оценка δ_k^2 вычисляется следующим образом

$$\delta_k^2 = \gamma V + \alpha \delta_{k-1}^2 + \beta u_k^2, \tag{3.12}$$

[4] По поводу данного термина см. сноску на стр. 61.

где α, β, γ - постоянные положительные коэффициенты, $\alpha < 1$. Если предположить, что имеется бесконечная предыстория наблюдений u_i^2, то эта рекуррентная формула может быть последовательно преобразована в выражение:

$$\delta_k^2 = \gamma V (1 + \alpha + \alpha^2 + ...) + \beta (u_k^2 + \alpha u_{k-1}^2 + \alpha^2 u_{k-2}^2 + ...).$$

Нетрудно видеть, что (3.11) в данном случае эквивалентно тому, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Обобщением *GARCH(1,1),* называемым *GARCH(p,q),* является выражение вида (3.12), куда входят $\delta_{k-1}, \delta_{k-2}, ..., \delta_{k-p}$ и $u_k^2, u_{k-1}^2, ..., u_{k+1-q}^2$, однако такие выражения используются реже.

Частным случаем *GARCH(1,1)* является метод *EWMA (exponentially weighted moving average),* в котором $\gamma = 0$, то есть не учитывается возврат к среднему. В системе оценки рыночного риска *RiskMetrics,* разработанной *J.P.Morgan,* волатильности вычисляются методом *EWMA* с $\alpha = 0.94$, $\beta = 0.06$. Эти параметры были выбраны как наилучшие в среднем для всех рынков.

До сих пор речь шла о вычислении оценки волатильности для текущего момента. Для того чтобы сделать прогноз волатильности на l шагов вперед, в модели *GARCH(1,1)* следует использовать выражение

$$\delta_{k+l}^2 = V + (\alpha + \beta)^l (\delta_k^2 - V).$$

Так как $\alpha + \beta < 1$, то по мере увеличения глубины прогноза оценка сходится к V. В *EWMA* $\alpha + \beta = 1$, поэтому наилучший прогноз просто совпадает с текущей оценкой волатильности.

Пример 3.1. Проиллюстрируем метод *EWMA* на примере цены акции РАО «ЕЭС России» на торгах в РТС в «послекризисный» период 01.10.98 - 20.06.02 (рис. 3.2).

Рис. 3.2. Динамика цены акции РАО «ЕЭС России» на торгах в РТС

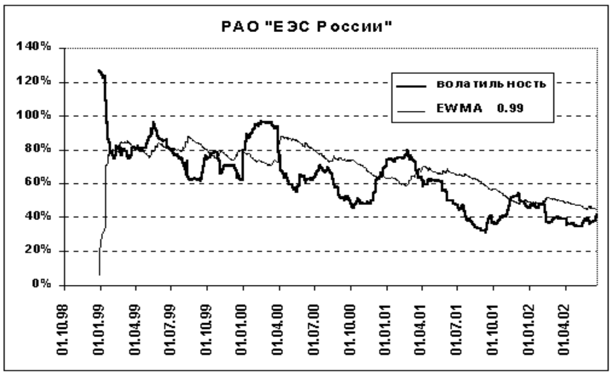


Рис. 3.3. Историческая волатильность и прогноз методом EWMA с $\alpha = 0.99$

На рис. 3.3 каждая точка графика «волатильность» означает историческую волатильность, рассчитанную по предшествующему 60-дневному периоду. График *«EWMA 0.99»* построен методом *EWMA* с $\alpha = 0.99$, при этом каждая точка графика отнесена не к тому моменту, в который она могла бы быть реально рассчитана, а сдвинута вправо (в будущее) на 60 точек. Тем самым для каждого момента изображена истинная волатильность в предшествующий 60-дневный период и ее прогноз методом *EWMA.*

Если построить график, подобный рис. 3.3, для $\alpha = 0.94$, то окажется, что в этом случае *EWMA* чрезмерно сильно реагирует на последние по времени движения цены и ошибочно прогнозирует их вперед. При $\alpha = 0.99$ прогноз оказывается лучше, например, по критерию среднего квадрата отклонений прогноза от исторической волатильности.

Относительно скорости тренда μ на основании рис. 3.2 можно сделать лишь тот вывод, что после начального периода роста цены наступил период бокового тренда, то есть в первом приближении можно считать, что $\mu = 0$. Если бы рассматривался курс рубля к доллару, то долговременный тренд прослеживался бы более четко.■

ГЛАВА 4. СТОИМОСТЬ ФОРВАРДНЫХ И ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ

Прежде чем перейти к вопросу о теоретической стоимости опционов, целесообразно рассмотреть более простые форвардные и фьючерсные контракты. Это позволит наглядно продемонстрировать арбитражный подход к определению стоимости производных финансовых инструментов.

Термины цена и стоимость срочного контракта используются в дальнейшем в различных смыслах. Цена - это вполне определенная величина, сложившаяся под влиянием рыночного спроса и предложения, по которой в действительности заключен или может быть заключен контракт. Стоимость - это абстрактная величина, показывающая цену, по которой теоретически должен был бы быть заключен контракт для того, чтобы ни одна из сторон сделки не имела возможности получения арбитражной прибыли. Таким образом, если цена контракта отличается от его стоимости, появляется возможность для арбитража.

Необходимо иметь в виду, что теоретические рассуждения, применяемые при определении стоимости, обычно идеализированы и упрощают реальную ситуацию. На практике для проверки возможности арбитража следует просчитать всю цепочку предполагаемых операций, детально учитывая конкретные обстоятельства: разницу ставок привлечения и размещения, начальную маржу (см. главу 13), резервные средства для выплаты вариационной маржи в случае фьючерсных контрактов и опционов без уплаты премии, порядок налогообложения, комиссионные, налоги и т.п.

4.1. ФОРВАРДНЫЕ КОНТРАКТЫ

Бездивидендная акция

Обозначим текущую цену акции через S, стоимость форвардного контракта на поставку акции со сроком исполнения T - через F^a. Если цена акции удовлетворяет уравнению (3.3) с заменой F на S, то, на первый взгляд, «естественной» ценой форвардного контракта является ожидаемое среднее значение цены акции в момент T, то есть $F^a = \overline{S(T)} = Se^{\mu T}$ (см. (3.5)). В действительности за теоретическую стоимость форварда принимается

$$F^a = Se^{rT} . \qquad (4.1)$$

Если реальная форвардная цена не равна стоимости, то существует арбитражная стратегия, позволяющая получать прибыль не в среднем, а гарантированно. Пусть, например, $F^a > Se^{rT}$. Тогда в момент $t = 0$ необходимо занять сумму S под процент *r*, купить акцию и продать форвардный контракт, а в момент *t=T* получить по форвардному контракту за акцию цену F^a, что по предположению больше возвращаемой в погашение кредита суммы. Данная арбитражная стратегия называется прямым арбитражем (*cash and carry arbitrage).*

При $F^a < Se^{rT}$ используется так называемая короткая продажа акции *(short sale)*, или, иначе, продажа без покрытия. В момент *t=0* акция берется в долг, продается по цене S, полученная сумма размещается под безрисковый процент *r* и одновременно покупается форвардный контракт. В момент $t = T$ акция выкупается по цене F^a и возвращается владельцу, при этом остается прибыль. Этот тип операций называется обратным арбитражем *(reverse cash and carry arbitrage*). Из-за отсутствия в настоящее время нормативных процедур, допускающих продажу акций без покрытия, схема обратного арбитража реально не применима, однако несколько изменив последовательность рассуждений, к соотношению (4.1) можно прийти на основании понятия квазиарбитража, в котором продажа акции без покрытия не требуется (см. раздел 4.4).

Будем называть доходность операции по покупке базисного актива и одновременной продаже форвардного контракта, при которой фиксируется будущая цена продажи базисного актива, доходностью «спот-форвард» (*implied repo rate*). В данном случае, если S, F^a - реальные рыночные цены, то простая доходность спот-форвард R_F и соответствующая непрерывно начисляемая процентная ставка r_F определяются из соотношения

$$1 + R_F T = e^{r_F T} = \frac{F^a}{S} .$$

Выше речь шла о том, что при $r_F \neq r$ возникают условия для арбитража. Поскольку арбитражная стратегия дает прибыль без всякого риска и тем большую, чем значительнее объемы сделок, при нарушении соотношения (4.1) такие операции должны проводиться очень активно и в силу рыночных механизмов приводить к устранению ценового дисбаланса. Реально в силу различия цен покупки и продажи, ставок привлечения и размещения, а также других факторов в ценах форвардных контрактов возникает «зазор», в котором получение прибыли описанным способом невозможно либо сопряжено с риском.

Дивидендная акция

Пусть по акции в заранее известные моменты $T_1, T_2, \dots, T_m < T$ будут выплачены известные же дивиденды $d_1, d_2, \dots, d_m$ соответственно. Тогда форвардный курс дается выражением

$$F^{див} = S^{див} e^{rT}, \tag{4.2}$$

где $$S^{див} = S - d_1 e^{-rT_1} - d_2 e^{-rT_2} - \dots - d_m e^{-rT_m}$$ - приведенная текущая стоимость акции с учетом будущих дивидендов, которые будут выплачены до момента *T*. Выражения $d_1 e^{-rT_1}$, $d_2 e^{-rT_2}$, …, $d_m e^{-rT_m}$ представляют собой текущие стоимости будущих дивидендов. Если $d_1, d_2, \dots, d_m$ не известны, то не остается ничего лучшего, как использовать прогнозируемые значения.

Рассуждения в данном случае аналогичны. Если $F^{див} > S^{див} e^{rT}$, то в момент $t = 0$ необходимо занять сумму S, купить акцию и продать форвардный контракт, а в момент $t = T$ получить по форвардному контракту за акцию $F^{див}$. Кроме того, обладание акцией позволит получить дивиденды, которые по мере поступления будут размещаться под процент *r*. В итоге окончательная сумма на момент *T* будет равна

$$F^{див} + d_1 e^{r(T - T_1)} + d_2 e^{r(T - T_2)} + \dots + d_m e^{r(T - T_m)},$$

что, как нетрудно проверить, больше возвращаемой в погашение кредита суммы.

При $F^{див} < S^{rT}$, как и в случае бездивидендной акции, в момент $t = 0$ акция берется в долг, продается по цене S, полученная сумма размещается под безрисковый процент r и одновременно покупается форвардный контракт. При этом по мере выплаты дивидендов по акции заемщик акции, проводящий данную операцию, обязан выплачивать кредитору акции дивиденды. Это осуществляется за счет суммы S с начисленными по ней процентами. Так, в момент T_1 из суммы Se^{rT_1} будет выплачено d_1, в момент T_2 из суммы $(Se^{rT_1} - d_1)e^{r(T_2 - T_1)}$ будет выплачено d_2 и т. д. В момент $t = T$ акция выкупается по цене $F^{див}$ и возвращается кредитору акции, при этом также остается прибыль.

Аналогично определяется форвардный курс купонной облигации, если под $d_1, d_2, \dots, d_m$ понимать будущие выплаты по купонам, приходящиеся на период действия форвардного контракта. Особенность купонной облигации заключается в способе ее котировки: объявляемые спот-цены покупки и продажи, а также цены сделок не включают накопленный доход по купону с ближайшей датой погашения. В соответствии с этим расчет форвардного курса начинается с определения полной текущей цены облигации (прибавлением накопленного купонного дохода). Далее применяется формула (4.2), а результат уменьшается на купонный доход, который будет накоплен к моменту исполнения форвардного контракта от момента погашения предыдущего купона.

Валюта

Форвардный курс иностранной валюты $F^{в}$ определяется аналогично:

$$F^{в} = Se^{(r - r_в)T}, \tag{4.3}$$

где S - текущий спот-курс валюты, $r_в$ - безрисковая процентная ставка по валюте. При $F^{в} < Se^{(r - r_B)T}$ арбитражная прибыль возникает в результате заимствования валюты, конвертации ее в рубли по текущему курсу, размещения рублей под проценты и покупке форвардного контракта. В момент $t = T$ на полученные рубли покупается валюта по форвардному курсу и погашается валютный кредит, при этом остается прибыль. Если $F^{в} > Se^{(r - r_B)T}$, то в описанной процедуре рубли и валюта меняются местами.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях форвардный курс не зависит от случайных факторов, влияющих на курс акции или валюты в будущем, а полностью определяется известными на текущий момент параметрами. Независимость от будущих значений курса достигается за счет определенных операций, сопровождающих собственно покупку или продажу контракта. Если этих операций не предполагается, например, форвардный контракт покупается или продается в спекулятивных целях, то для оценки его прибыльности необходимо строить прогнозы, в частности, привлекая вероятностные модели типа (3.3).

4.2. ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Открытие позиций по фьючерсным контрактам влечет за собой ежедневные начисления/списания средств из-за изменения расчетной цены. В разделе 1.3 было показано, что результирующие прибыли/убытки по форвардному и фьючерсному контрактам совпадают, однако при этом не учитывались проценты, которые могут начисляться по текущим остаткам на счетах. Будем считать, что на остаток на счете, образовавшийся к концу дня после корректировки фьючерсных позиций по рынку, к следующему дню начисляется процент. Соответствующая ставка непрерывно начисляемого процента r определяется исходя из однодневного процента. Пусть цена покупки фьючерсного контракта равна F^{ϕ}, последовательные котировки вплоть до последнего дня торговли контрактом равны $F_1, \ldots, F_m$, а цена базисного актива на следующий день - день исполнения контракта - равна S_T. Предположим, что контракт расчетный. Тогда суммы, которые ежедневно начисляются/ списываются по открытой позиции, составляют $F_1 - F^{\phi},\ F_2 - F_1, \ldots, S_T - F_m$. Обозначим τ однодневный период, тогда $T = m\tau$. Результирующая сумма по фьючерсной позиции, полученная с учетом ежедневных начислений процентов на остатки на счетах, равна

$$\{[(F_1 - F^{\phi})e^{r\tau} + F_2 - F_1]e^{r\tau} + \ldots\}e^{r\tau} + S_T - F_m =$$
$$[F_1 - F^{\phi}]e^{mr\tau} + [F_2 - F_1]e^{(m-1)r\tau} + \ldots + S_T - F_m.$$

Это выражение зависит от всей неизвестной заранее траектории изменения фьючерсных расчетных цен, поэтому описанные выше арбитражные стратегии для форвардных контрактов не приводят к такому же гарантированному результату в случае фьючерсных контрактов. Графики прибылей/убытков по форвардному контракту в зависимости от S_T (рис. 1.1, 1.2) для фьючерсных контрактов, строго говоря, теряют смысл. В случае фьючерсного контракта можно говорить лишь о локальных однодневных ожидаемых прибылях/убытках в зависимости от расчетной цены следующего дня, при этом график каждый день должен пересекать горизонтальную ось в новой точке - последней расчетной цене контракта.

Тем не менее арбитражные стратегии, на которых может быть основана оценка теоретической стоимости фьючерсных контрактов, существуют. Остановимся на этом вопросе подробно, поскольку аналогичные рассуждения применяются и для опционов без уплаты премии. Пусть вначале открывается длинная фьючерсная позиция на *M* контрактов, в конце дня позиция наращивается до $Me^{r\tau}$ (по расчетной цене этого дня), в конце следующего дня - до $Me^{2r\tau}$ и т.д. Тогда результирующая сумма оказывается равна

$$M\{[(F_1 - F^{\phi})e^{r\tau} + (F_2 - F_1)\exp(r\tau)]e^{r\tau} + \ldots\}e^{r\tau} + M(S_T - F_m)\exp(mr\tau) = M(S_T - F^{\phi})e^{rT}.$$

В первой строке умножение на $e^{r\tau}$ обозначает увеличение остатка на счете из-за процентов, а умножение на ту же величину, но записанную в форме *exp(rτ)*, соответствует увеличению количества контрактов. Результат же зависит только от цены покупки первых *M* контрактов и цены базисного актива на день исполнения. Предположим, что одновременно с покупкой фьючерсных контрактов покупаются форвардные контракты в количестве Me^{rT} по цене $F^{фор}$ и с той же датой исполнения. Тогда в день исполнения контрактов прибыли/убытки по форвардным контрактам составят $M[S_T - F^{фор}]e^{rT}$. Сравнение с результатом операции по фьючерсам показывает, что если цены форвардного и фьючерсного контрактов в начальный момент не совпадают, то возможно получение арбитражной прибыли. Например, если фьючерсный контракт дешевле форвардного, то необходимо продать Me^{rT} форвардных контрактов и одновременно купить *M* фьючерсных контрактов, наращивая впоследствии позицию до Me^{rT}. Результат этой операции будет равен $M[F^{фор} - F^{\phi}]e^{rT}$ >0.

Таким образом, теоретические стоимости фьючерсных контрактов должны определяться теми же выражениями, что и стоимости форвардных контрактов. Еще одним выводом из приведенных рассуждений является то, что для получения одинакового результата количество фьючерсных контрактов в начале операции должно быть меньше, чем форвардных, в e^{rT} раз.

4.3. СОПОСТАВЛЕНИЕ СТОИМОСТИ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ С УПЛАТОЙ И БЕЗ УПЛАТЫ ПРЕМИИ

Хотя обозначенная в заголовке данного раздела тема не относится непосредственно к теме главы, целесообразно рассмотреть ее в связи с предыдущим разделом. Предположим, что одновременно торгуются два опциона на фьючерс, отличающихся лишь способом расчетов. Текущие цены опционов с уплатой и без уплаты премии обозначим $C^{фес}$, $C^{феб}$, их финальную стоимость - C_T (она одинакова у обоих опционов). Предполагая, что первоначально покупается Me^{-rT} опционов без уплаты премии, а затем повторяется процедура ежедневного наращивания позиции аналогично тому, как это делалось для фьючерсного контракта, получаем, что прибыли/убытки по опциону без уплаты премии также не будут зависеть от траектории котировки и по итогам дня экспирации составят $M[C_T - C^{феб}]$.

Предположим, что цена опциона с уплатой премии $C^{фес}$ превышает $e^{-rT}C^{феб}$. Продав M опционов с уплатой премии и немедленно получив $MC^{фес}$, к дню экспирации с учетом процентов на эту сумму имеем $Me^{rT}C^{фес}$, а выплаты по короткой опционной позиции составят MC_T. Складывая прибыли/убытки по опциону с уплатой премии с прибылями/убытками по опциону без уплаты премии, получаем в итоге

$$Me^{rT}C^{фес} - MC_T + M[C_T - C^{феб}] = Me^{rT}[C^{фес} - e^{-rT}C^{феб}] > 0.$$

Таким образом, в этом случае возможно получение арбитражной прибыли. Если $C^{фес} < e^{-rT}C^{феб}$, то арбитражная операция заключается в продаже опционов без уплаты премии (и последующем наращивании позиции) и одновременной покупке опционов с уплатой премии на привлеченные под процент r средства.

Окончательный результат сводится к тому, что для устранения возможностей арбитража должно выполняться соотношение

$$C^{феб} = e^{rT}C^{фес} \quad . \tag{4.4}$$

Далее будет показано, что формула для $C^{фес}$ содержит перед всем выражением дисконтирующий множитель e^{-rT}. Наличие в правой части (4.4) компенсирующего множителя приводит к тому, что $C^{феб}$ не зависит от процентной ставки. Еще одно объяснение этому, менее строгое и формальное по сравнению с данными алгебраическими выкладками, будет приведено в разделе 9.2.

4.4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим примеры арбитражных стратегий, описанных в разделе 4.1.

Пример 4.1. На рисунке 4.1 показаны графики цены последней сделки по акции РАО «ЕЭС России» на торгах ММВБ и расчетной цены июньского фьючерса на эти акции в FORTS за период 17.12.01-17.06.02. Будем считать, что непосредственно перед окончанием торговой сессии можно одновременно провести сделки по акциям и фьючерсам по указанным ценам. В качестве цены акции в последний день торгов фьючерсом (14.06.02) возьмем средневзвешенную цену, то есть цену, по которой происходит исполнение фьючерсного контракта. Рассмотрим следующую операцию:

- 17.12.01 – покупка 1000 акций по цене 4485 за пакет и продажа одного фьючерса по цене 4695;
- 14.06.02 – продажа акций по средневзвешенной цене 4135 с потерями в размере 4485-4135=350 рублей;
- 17.06.02 - исполнение фьючерсного контракта по цене 4135 с получением суммарной вариационной маржи 4695-4135=560 рублей.

Таким образом, вначале инвестировано 4485 рубля – стоимость пакета акций, а результат составил 4135+560=4695 рублей – цену фьючерса. Поскольку начальная и конечная стоимости портфеля фиксированы, то операция эквивалентна покупке бескупонной облигации с исполнением 17.06.02. Полученной комбинации можно дать условное название синтетической облигации (СО).

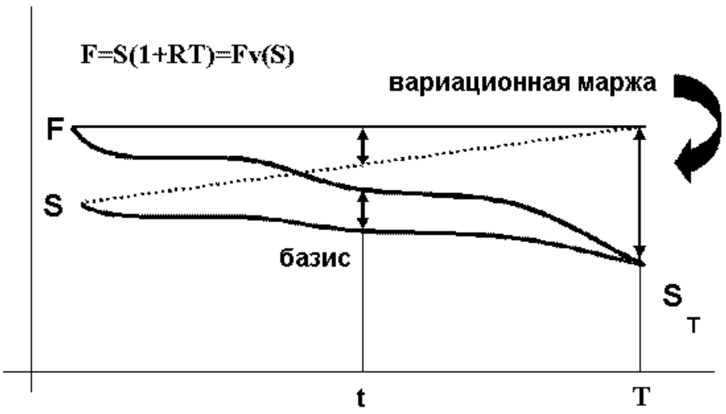


Рис. 4.1. Формирование синтетической облигации

На рисунке схематично показано также, как меняется стоимость СО в промежуточные моменты (пунктирная линия). Разность между фьючерсной ценой и ценой базисного актива на спот-рынке называется базисом. По мере уменьшения базиса цена синтетической облигации, то есть

цена СО = текущая цена пакета акций + суммарная вар. маржа,

приближается к начальной цене фьючерса *(target price).*

► Показать, что цена синтетической облигации, сформированной в некоторый начальный день, в любой из последующих дней равна начальной цене фьючерса за вычетом текущего базиса.◄

Для того чтобы спланировать досрочное завершение операции, то есть продажу пакета акций и закрытие фьючерсной позиции в один из дней до 14.06.02, необходимо спрогнозировать базис на этот день. В первом приближении базис убывает линейно с течением времени, однако поскольку заранее эта величина точно не известна, возникает неопределенность – остаточный риск, который называется риском базиса. Обычно этот риск существенно меньше риска изменения стоимости пакета акций как такового, без фьючерсов, что наглядно демонстрирует рис. 4.2, построенный по ценам акции РАО «ЕЭС России» и фьючерса с исполнением 17.06.02. Использование производных инструментов для уменьшения риска называется хеджированием – об этом подробнее в гл. 12.

Рис. 4.2. Формирование синтетической облигации

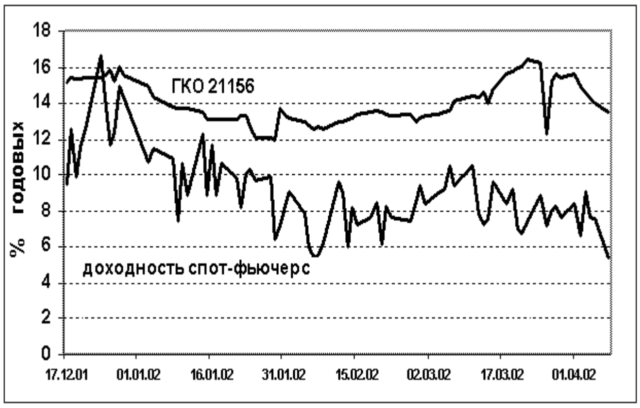


Рис. 4.3. Доходности спот-фьючерс и ГКО

Доходность операции при сохранении позиций до исполнения фьючерсов, названная выше доходность спот-фьючерс, равна

$$R_F = \left(\frac{4695}{4485} - 1\right) * \frac{365}{180} * 100\% = 9.5\%.$$

Реально доходность будет ниже, поскольку под продажу фьючерсных позиций необходимо внести гарантийное обеспечение, а также предусмотреть средства на возможную выплату отрицательной вариационной маржи в случае роста фьючерсной цены.

На рис. 4.3 показана доходность R_F в случае, если бы операция начиналась в другие дни, в сопоставлении с доходностью ГКО со сроком погашения, близким к дате исполнения фьючерса. Хотя на приведенном графике доходность R_F всего лишь в один из дней превышает доходность ГКО, подобные ситуации не редкость (особенно в периоды подъема на рынке акций). В общем случае при таком соотношении доходностей:

- если можно заимствовать средства по ставке не выше R_F, то формирование СО позволит получить арбитражную прибыль;
- если уже имеются денежные средства и планируется их размещение в безрисковые инструменты, то СО будет более выгодным вложением, чем ГКО;
- если есть пакет акций и ожидается относительно кратковременное падение цены акции, то вместо продажи пакета и покупки ГКО на этот срок достаточно продать фьючерсы; это выгодно и с точки зрения минимизации комиссионных расходов.

Реально доходность СО в рассматриваемый период была ниже доходности ГКО. Рассмотрим, как фьючерсы могут быть использованы в такой ситуации для повышения эффективности размещения средств. Изложенную выше процедуру формирования СО символически можно записать как

«синтетическая облигация» = «акция» - «фьючерс».

В определенном смысле справедливо и другое соотношение:

«синтетическая акция» = «ГКО» + «фьючерс».

Предположим, что исходной позицией является пакет ГКО. Пусть ввиду прогноза роста цен акций принимается решение об инвестировании этих средств в акции РАО «ЕЭС России». Прямой вариант действий состоит в продаже ГКО и покупке акции. В синтетическом способе ГКО сохраняются в портфеле и к ним добавляются длинные фьючерсные позиции.

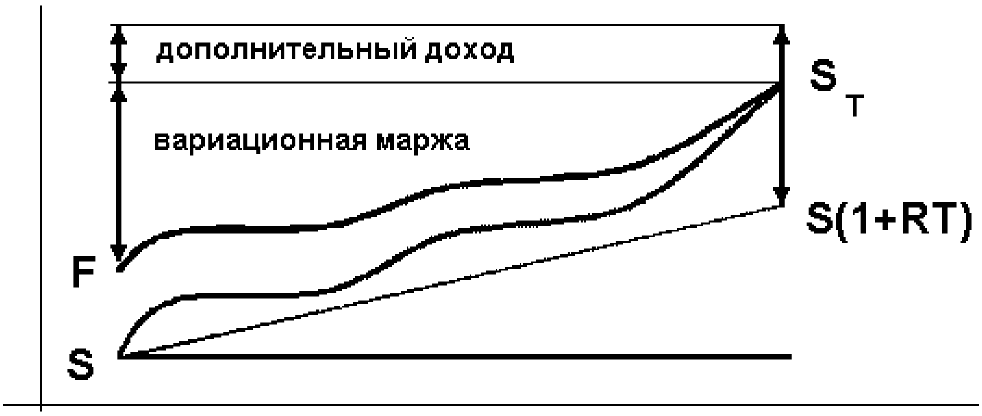


Рис. 4.4. Синтетическая покупка акций

Результат иллюстрируется рисунком 4.4. Так как по предположению $F < S(1+RT)$, то сумма вариационной маржи по фьючерсу $S_T - F$ и результата размещения начальной суммы под фиксированный процент $S(1+RT)$ превысит доход от акции $S_T - S$.

Рассмотренные операции как для случая переоцененности, так и недооценности фьючерса называются квазиарбитражем. В них благодаря синтетическим схемам достигается бóльшая доходность по сравнению с альтернативными вариантами, в которых фьючерсы не используются. Теоретически, на эффективном рынке такие дисбалансы цен и процентных ставок должны быстро устраняться. Реально, однако, цены фьючерсов в значительной степени формируются со спекулятивной точки зрения - как прогноз будущей цены базисного актива. Именно поэтому недо- или переоцененность фьючерсов может иметь столь сильно выраженный и длительный по времени характер, как на последней диаграмме.

Пример 4.2. Следующий пример демонстрирует краткосрочные арбитражные операции между рынком спот и фьючерсным. На рис. 4.5 показаны графики цены акции РАО «ЕЭС России» и фьючерса с исполнением 15.03.02, взятые с 10-минутным интервалом. Непосредственно видно, что, как и на рис. 4.2, цены движутся практически параллельно, а значит, спекулятивные операции только на фьючерсах или только на акциях будут давать приблизительно одинаковые результаты. Отличие состоит в том, что спекуляции на фьючерсах технически проще и выгоднее по следующим причинам:

- в то время как занятие короткой позиции по акциям (продажа без покрытия, short selling) требует заимствования акций, покупка и продажа фьючерса – симметричные и одинаково простые операции;
- маржинальная торговля акциями сопряжена для клиента брокерской фирмы с выплатой процентов по суммам, на которые брокер кредитует клиента, тогда как при покупке или продаже фьючерса

клиенту достаточно внести начальную маржу порядка 15% от стоимости контракта, и никаких дополнительных средств не требуется.

Кроме того, с течением времени цены фьючерса и акции имеют тенденцию сближаться, то есть базис – превышение цены фьючерса над ценой спот рынка – уменьшается. По этой причине на падающем рынке движение цены фьючерса, как правило, будет несколько большим, чем цены акции.

Рис. 4.5. Цена пакета 1000 акций РАО «ЕЭС России» и мартовского фьючерса

Как было показано выше, теоретическая стоимость фьючерсного контракта равна $\widetilde{F}_0 = S_0(1+RT)$, соответственно, теоретическое значение базиса на момент начала операции равно $\widetilde{F}_0 - S_0 = S_0 RT$.

Рис. 4.6. Возможности краткосрочных арбитражных операций «спот-фьючерс»

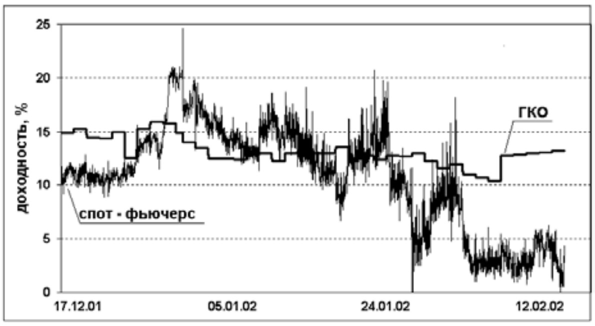


Рис. 4.7. Доходность «спот-фьючерс»

Из рис. 4.6 следует, что колебания фактического базиса являются достаточно существенными для того, чтобы представлять интерес для арбитражеров, поскольку спрэды в ценах покупки и продажи акций и фьючерсов, а также комиссионные сборы в сумме не превышают нескольких рублей. При этом теоретический базис действительно может служить ориентиром для оценки того, является ли реальный базис завышенным или заниженным. В случае завышенного базиса следует занимать короткую позицию по фьючерсу и длинную по акциям, а в случае заниженного - противоположные позиции.

Пример 4.3. Рассмотрим доходность операции конвертации рублей в доллары США по курсу S, покупки валютной облигации с простой годовой доходностью доходностью $R_в$ и сроком погашения T, и одновременно продажи фьючерсов на доллар США по цене F с тем же сроком исполнения. Если начальная рублевая сумма равна V, то количество рублей в результате операции равно

$$\frac{V}{S}(1+R_в T)F = V(1+R_в T)(1+R_F T),$$

где R_F - доходность спот-фьючерс. Рублевая доходность всей цепочки составляет

$$R = R_в + R_F + R_в R_F T \,. \tag{4.5}$$

В терминах непрерывно начисляемых процентных ставок это соотношение записывается особенно просто:

$$r = r_в + r_F \,.$$

Теоретически, эта доходность должна быть равна доходности рублевой облигации с тем же сроком погашения.

В качестве примера сопоставим указанные доходности для каждого из дней в период 3.08.98 – 14.08.98, непосредственно предшествовавший замораживанию ГКО-ОФЗ и девальвации рубля. На рисунке 4.7 показаны следующие величины:

- ВВЗ - простая годовая доходность облигации внутреннего валютного займа третьего транша с датой погашения 14.05.99;
- «спот-фьючерс» – доходность, рассчитанная по соотношению курса доллара и цены фьючерса с исполнением 17.05.99;
- ГКО – полусумма простых годовых доходностей выпусков ГКО 21116 и 21117 с датами погашения 12.05.99 и 19.05.99 соответственно;
- «спот-ВВЗ-фьючерс» – простая годовая доходность цепочки операций, описанных выше.

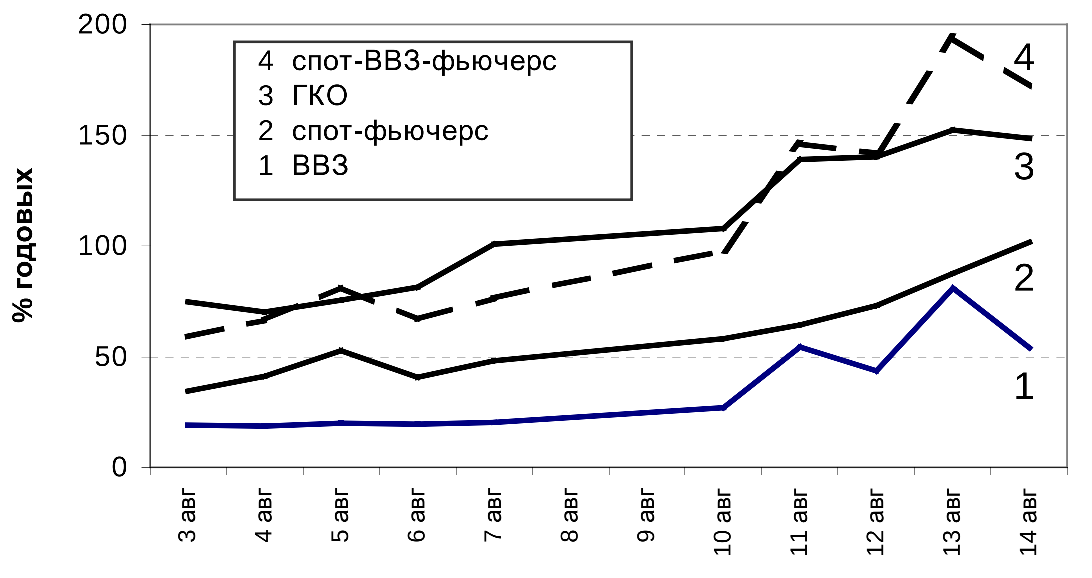


Рис. 4.7. Доходности «спот-фьючерс» и ГКО

Рассматриваемый период характеризовался активным и порою лихорадочным сбросом российских облигаций, как рублевых, так и валютных, поэтому в данной динамичной и неравновесной ситуации трудно ожидать точного выполнения соотношения (4.5). Тем не менее кривые 3 и 4 достаточно близки и изменяются синхронно.

<u>ГЛАВА 5.</u> МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

5.1. «ВЕРОЯТНОСТНЫЙ» ПОДХОД

В разделе 4.1 было упомянуто, что если фьючерс на бездивидендную акцию покупается или продается в спекулятивных целях с намерением сохранять позицию до дня исполнения, то следует ориентироваться на ожидаемое среднее цены акции в день исполнения $Se^{\mu T}$. Тем не менее, как было показано, теоретическое значение фьючерсной цены определяется не из вероятностных, а из арбитражных соображений и оказывается равно Se^{rT}. Рассмотрим первый - «вероятностный» - подход применительно к опционам. Как и ранее, будем считать, что модель движения цены базисного актива описывается уравнением (3.3) с известными параметрами.

Рассмотрим европейский опцион колл на акцию. Предположим, что купив опцион и уплатив премию, покупатель не собирается предпринимать никаких других операций с опционами или базисным активом вплоть до даты экспирации опциона, а затем исполнить или не исполнять опцион в зависимости от цены акции. Пусть текущая цена акции равна $S_0 = S$ и ожидаемая динамика цены акции описывается уравнением (3.3) с заменой F на S. Если параметры μ и σ модели известны, то можно определить ожидаемое вероятностное распределение цены акции в любой будущий момент, в том числе в день экспирации, а значит, и распределение финальной стоимости опциона C_T (см. (2.1)).

Предположим, что сделка по опциону заключается многократно, затем случайным образом реализуется одна из траекторий цены акции и в результате становится известной величина C_T. Если усреднить эти величины и допустить, что по условиям контракта покупатель обязан уплатить продавцу фиксированную премию не в день заключения контракта, а в день экспирации, то рассчитанное вероятностным способом среднее является «естественной» справедливой ценой опциона, поскольку шансы покупателя и продавца получить прибыль или понести убытки в этом случае равны.

Обозначим эту среднюю величину $C^{aec}(T)$, где T - момент экспирации опциона. Усреднение указанных сумм приводит к следующему результату:

$$C^{aec}(T) = \overline{S(T)}N(d_1) - EN(d_2), \tag{5.1}$$

где E - страйк, $\overline{S(T)} = Se^{\mu T}$,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\overline{S(t)}}{E}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{\overline{S(T)}}{E}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$N(x)$ - функция стандартного нормального распределения:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{5.2}$$

Формула для $P^{aec}(T)$ получается аналогично усреднением возможных исходов. При этом оказывается, что $P^{aec}(T)$ и $C^{aec}(T)$ связаны следующим соотношением:

$$C^{aec}(T) - P^{aec}(T) = \overline{S(T)} - E.$$

Для того чтобы пересчитать $C^{aec}(T)$, $P^{aec}(T)$ к моменту заключения контракта, необходимо использовать дисконтирующий множитель (3.2). Например, для опциона колл окончательный результат имеет вид:

$$C^{aec} = e^{-rT}C^{aec}(T) = e^{-rT}[\overline{S(T)}N(d_1) - EN(d_2)]. \tag{5.3}$$

Как следствие получаем, что стоимости опционов колл и пут на одном страйке удовлетворяют тождеству:

$$C^{aec} - P^{aec} = e^{-rT}[Se^{\mu T} - E]. \tag{5.4}$$

Связь между стоимостями этих же опционов можно получить другим, более простым способом. Предположим, что в момент $t=0$ имеются два портфеля. Первый содержит длинную позицию по опциону колл на страйке E и сумму денег Ee^{-rT}, второй - длинную позицию по опциону пут на том же страйке E и акцию. В момент экспирации опциона стоимость первого портфеля равна $\max[E, S_T]$, где S_T - стоимость акции при $t=T$. Действительно, первоначальная сумма денег с учетом процентов оказывается равна E, а опцион дает $C_T = \max[S_T - E, 0]$, что в сумме составляет указанное выражение. Стоимость второго портфеля к этому моменту также оказывается равна этой величине, поскольку если $S_T \geq E$, то портфель состоит из акции, а если $S_T < E$, то опцион пут исполняется и акция продается за E.

Так как на момент экспирации стоимости порфелей одинаковы, то и в начальный момент они должны быть равны, иначе возможен арбитраж. Например, если первый портфель дороже второго, то необходимо (начиная с «нуля») продать опцион колл и занять сумму Ee^{-rT}. По предположению, полученной премии и занятой суммы будет с избытком хватать на покупку второго портфеля.

► Рассмотреть возможные исходы и убедиться, что на дату экспирации опционов итогом операции оказывается прибыль в размере разности начальных стоимостей портфелей.◄

К выводу о равенстве начальной стоимости портфелей можно прийти и другим путем: если из двух портфелей, стоимость которых в будущем обязательно сравняется, один дешевле, то спрос будет сосредоточен на этом портфеле, пока их стоимости не выровняются.

Таким образом, в момент $t=0$ стоимости портфелей должны совпадать, то есть

$$C^{aec} + Ee^{-rT} = P^{aec} + S. \tag{5.5}$$

Это соотношение называется пут-колл паритетом *(put-call parity).*

Перепишем пут-колл паритет в виде

$$C^{aec} - P^{aec} = e^{-rT}[Se^{rT} - E]. \tag{5.6}$$

Расхождение между (5.4) и (5.6) показывает, что одна из формул неверна. Так как вторая из них основана на простых арбитражных рассуждениях и не вызывает сомнений, то первый способ получения формулы стоимости опционов следует признать ошибочным.

Метод Блэка-Шоулса, рассматриваемый ниже, исходя из той же модели движения цены (3.3), дает результаты для стоимости опционов, совместимые с пут-колл паритетом. В отличие от «статичной» стратегии покупки (продажи) опциона и пассивного ожидания даты экспирациии, подход Блэка-Шоулса предполагает проведение операций с базисным активом на протяжении всего периода существования опциона и как бы заменяет один «большой» спор непрерывной серией «маленьких» - относительно величины локального, скажем, однодневного изменения цены базисного актива. При этом окончательный результат оказывается инвариантным к конкретной траектории цены базисного актива и зависит лишь от одной обобщенной характеристики траектории - волатильности. Можно сказать, что подход Блэка-Шоулса уменьшает неопределенность, насколько это возможно, и максимально приближает «вероятностную» стратегию к «арбитражной».

Тем не менее статичные опционные стратегии также применяются, и для них соотношения (5.1), (5.3), (5.4) имеют смысл с тем замечанием, что использование в (5.3) для дисконтирования безрисковой процентной ставки *r* неправильно, поскольку результат операции носит неопределенный характер. Распределение случайной величины C_T является дискретно-непрерывным (рис. 5.1): имеется некоторая вероятность P_1 того, что C_T будет равно нулю (если S_T окажется меньше или равно страйку E), а для положительных C_T распределение «размыто». Чем больше возможное отклонение C_T от среднего $C^{aec}(T)$, то есть чем выше неопределенность в исходе, тем выше для покупателя должна быть ожидаемая средняя доходность операции - на уровне других инвестиций с тем же риском. Исходя из этой доходности в (5.3) и должен выбираться дисконтирующий множитель. Продажу опциона можно интерпретировать как получение кредита под процент, который становится известен только в момент *T*. Соответственно, для компенсации этого риска цена продажи должна быть выше (5.3). Расхождение цен покупки и продажи не исключает возможностей для сделок, поскольку индивидуальные оценки параметров μ, σ, а также ставки привлечения и размещения различны.

Функция $N(x)$ (5.2) будет постоянно встречаться в дальнейшем. Она является одной из встроенных функций *Excel*. Для тех, кто пользуется другими программными средствами, ниже приведена одна из ее возможных аппроксимаций в виде функции языка *C*, определяющей $N(x)$ с точностью до 7 знака после запятой.

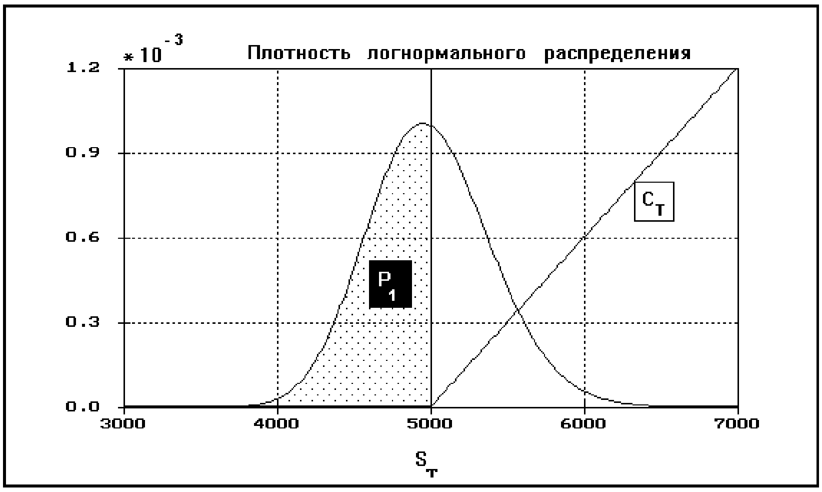


Рис. 5.1. Распределение S_T и финальная стоимость опциона C_T

```
double N(double x) {
double ax, t, d, p;
        if (x>10) return(1);
        if(x<-10) return(0);
        ax=fabs(x);
        t=1/(1+0.2316419*ax);
        d=0.3989423*exp(-0.5*x*x);
        p=d*t*((((1.330274*t-1.821256)*t+1.781478)*t--0.3565638)*t+0.3193815);
        p=(x>0) ? 1-p : p;
        return(p);
}
```

5.2. БИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД

Биномиальный метод, называемый также по имени его авторов методом Кокса-Росса-Рубинштейна *(Cox-Ross-Rubinstein)*, был предложен в 1979 году и является более поздним по отношению к методу Блэка-Шоулса (1973). Однако начинать знакомство с подходами к оценке опционов лучше именно с более простого биномиального метода. В определенном смысле он аналогичен численным методам решения дифференциальных уравнений. Первоначально данный подход применялся для расчета стоимостей американских опционов, для которых отсутствует точное аналитическое решение, а впоследствии был распространен на многие более сложные производные инструменты. В настоящее время численные методы наряду с методами статистических испытаний (Монте-Карло) чаще всего используются в моделях обсчета производных инструментов, так как позволяют максимально учесть реальные условия операций с ними.

Модель движения цены

Отправной точкой для биномиального метода является слегка модифицированное уравнение (3.3). Выше уравнение (3.3) использовалось как приближенное описание непрерывного случайного процесса. В биномиальном методе от непрерывного процесса преднамеренно делается шаг назад к уравнению (3.3), в котором под ξ_k понимаются величины, принимающие только два значения: 1 и -1 (отсюда название метода). Возможные траектории такого процесса схематически изображены на рис. 5.2. При уменьшении шага по времени сетка все более измельчается (раствор сетки - угол наклона крайних лучей - при этом также возрастает из-за множителя $\sqrt{\tau}$ в последнем слагаемом (3.3)) и в пределе содержит практически любую непрерывную траекторию, так что биномиальная модель не сужает класс рассматриваемых процессов. В то же время она позволяет выявить «микроструктуру» процесса и выработать определенную стратегию покупателя или продавца опциона.

Рисунок 5.2 именно схематический, так как траектории S_t должны изображаться экспонентами. Прямолинейные траектории получаются, когда вместо S_t сетка строится для $\ln S_t$, что позволяет получать более эффективные с вычислительной точки зрения алгоритмы.

Идея метода

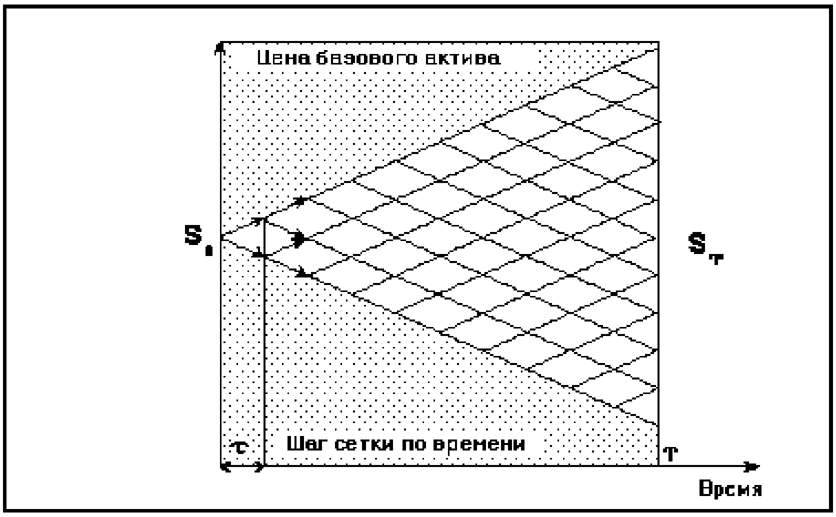


Рис. 5.2. Траектории движения цены базисного актива

Проиллюстрируем этот метод на примере европейского опциона колл на фьючерс с уплатой премии, предполагая пока, что непрерывно начисляемый процент *r* равен нулю.

<u>Пример 5.1.</u> Пусть необходимо оценить стоимость опциона колл на страйке 5000 за пять дней до экспирации опциона при текущей фьючерсной котировке 5200. Предположим, что на следующий день возможны только два сценария: котировка может измениться на 100 вниз или на 100 вверх. Возможные траектории показаны на рис. 5.3. Идея биномиального метода состоит в том, чтобы двигаться от дня экспирации опциона в обратном направлении к текущему дню. Предположим, что день экспирации наступил и фьючерсная котировка приняла одно из значений 4700, 4900, 5100, 5300, 5500, 5700. В этом случае сумма, которую получает держатель по одной открытой позиции, точно известна и изображается ломаной. Можно сказать, что в день экспирации цена обязательно совпадает со стоимостью и обе они равны указанной сумме, задаваемой выражением (2.1).

Рассмотрим ситуацию за день до экспирации, когда возможными значениями котировки являются 4800, 5000, 5200, 5400, 5600. Если котировка равна 4800, то при любом из двух сценариев следующего дня сумма, полученная по опциону, будет равна 0, поэтому и в узле 4800 необходимо поставить нулевую стоимость опциона. Более интересен узел 5000. Предположим, что в этой ситуации, то есть за день до экспирации и при сложившейся к этому моменту фьючерсной котировке 5000, куплено *M* опционов. Если котировка фьючерса уменьшится до 4900, то держатель опционов получит 0, а если котировка возрастет до 5100, то полученная сумма окажется равна 100 по каждой открытой позиции. Имеется способ устранить эту неоднозначность, продав одновременно с покупкой опционов фьючерсные контракты в количестве $\Delta=0.5M$. Тогда, как нетрудно проверить, независимо от сценария следующего дня сумма, полученная держателем опционов, будет равна *50M*. Действительно, при падении котировки до 4900 по коротким фьючерсным позициям будет получено 100Δ, а при росте котировки по опционам будет получено *100M*, но одновременно потеряно 100Δ по фьючерсам. При указанном выше выборе коэффициента Δ оба исхода приводят к одинаковому результату *50M*. Это означает, что стоимость одного опциона составляет 50. Комбинация, состоящая из купленных *M* опционов и проданных Δ фьючерсов, или противоположная ей - проданные *M* опционов и купленные Δ фьючерсов - являются частными случаями так называемого безрискового или дельта-нейтрального портфеля.

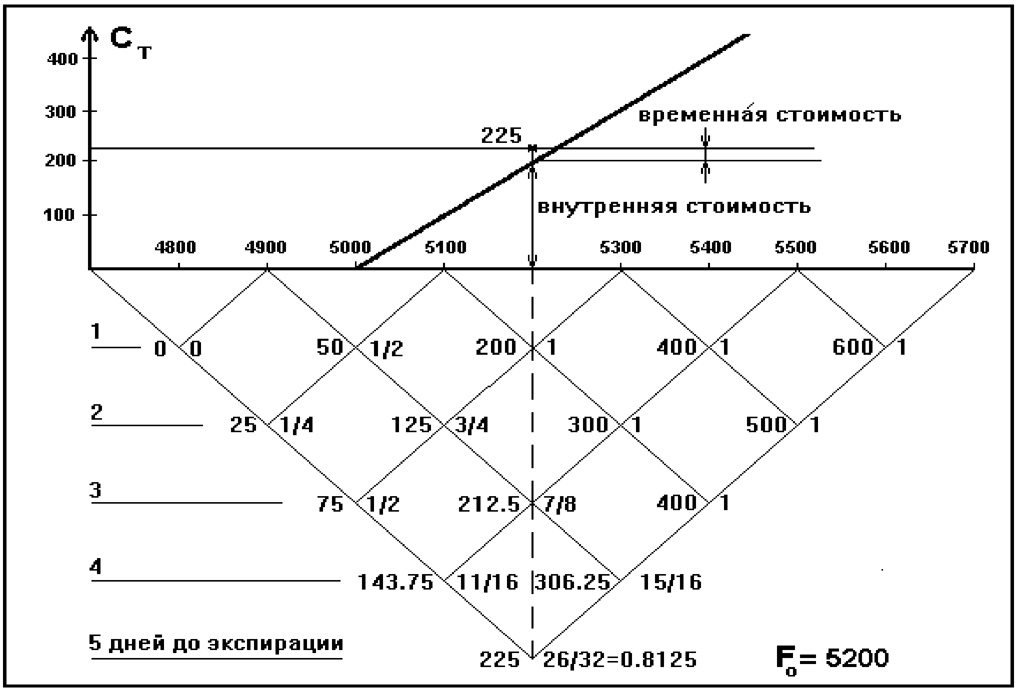


Рис. 5.3. Расчет стоимости опциона 5000 колл биномиальным методом

Если цена опциона меньше 50, например, 45, то существует прибыльная арбитражная стратегия: необходимо купить *M* опционных контрактов за 45*M* на заимствованные средства, продать Δ фьючерсных контрактов и получить на следующий день гарантированную прибыль в размере (50-45)*M*=5*M*. Если цена опциона больше 50, например, 60, то необходимо продать *M* контрактов за 60*M* и купить Δ фьючерсных контрактов. Тогда на следующий день при любом сценарии необходимо будет выплатить 50*M*, получив на этой операции (60-50)*M*=10*M*.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для остальных узлов этого уровня, затем узлов более низкого уровня и т. д. В каждом узле помимо стоимости опциона указано также значение Δ в расчете на один контракт. В результате стоимость опциона в начальной точке оказывается равна 225. Если цена опциона отличается от 225, то применимы те же арбитражные рассуждения, что и выше, но в «многоходовом» варианте. Если, например, цена опциона меньше 225, то возможно получение арбитражной прибыли путем покупки *M* опционов и продажи Δ фьючерсов, где Δ=0.81*M* для этого узла. В дальнейшем по мере течения времени и в зависимости от того, по какой именно траектории движется фьючерсная котировка, необходимо корректировать объем открытой фьючерсной позиции. При этом, как нетрудно убедиться, теоретическая стоимость портфеля - сумма стоимости опционов и реализованных прибылей/убытков по открытым фьючерсным позициям - остается на одном уровне 225*M*. Если, например, фьючерсная котировка движется влево и стоимость опциона падает, то ровно настолько же в портфеле появляется денежных средств за счет вариационной маржи по фьючерсам. Если фьючерсная котировка растет, то растет стоимость опциона, однако именно такую же сумму приходится выплачивать в качестве вариационной маржи. Цена опциона может быть меньше стоимости вплоть до дня, предшествующего экспирации, однако в день экспирации она обязана сравняться со стоимостью, что гарантирует прибыль, размер которой мог быть определен еще в начале операции. Если цена раньше сравнивается с теоретической стоимостью опциона или превышает ее, то в этот день можно закрыть опционные и фьючерсные позиции и получить ту же или большую прибыль.

Описанная стратегия - открытие опционных и противоположных им фьючерсных позиций и последующая коррекция соотношения их объемов в соответствии с текущим коэффициентом Δ (поддержание безрискового портфеля) называется динамическим хеджем, а параметр Δ - коэффициентом хеджа или просто дельтой. Термин хедж *(hedge* - ограждение от возможных потерь, страховка) используется здесь потому, что независимо от траектории движения фьючерсной котировки стоимость портфеля остается неизменной.

Учет процентных ставок

Выше предполагалось, что непрерывно начисляемый процент *r* равен нулю. Вернемся к расчету стоимости опциона за день до экспирации в узле 5000, считая для примера, что *r*=360% (такое утрированно большое значение выбрано из соображений «выпуклости» расчетов). В этом случае стоимость опциона в данном узле должна быть равна $50e^{-r\tau}$=49.5, где τ=1/365 - однодневный интервал. Если стоимость опциона отличается от указанной, то также применимы арбитражные соображения с учетом того, что деньги на покупку опциона заимствуются, а деньги от продажи размещаются под процент *r*.

После того как определены стоимости в узлах за день до экспирации, рассчитываются стоимости за два дня до экспирации. Например, в узле 5100 стоимость опциона равна

$$\frac{50\,e^{-r\tau}+200\,e^{-r\tau}}{2}e^{-r\tau}=125\,e^{-2r\tau}\cong 122.5,$$

то есть равняется стоимости опциона без учета процентных ставок, дисконтированной исходя из оставшегося времени существования опциона. Изменяется и коэффициент Δ:

$$\Delta=\frac{50\,e^{-r\tau}+200\,e^{-r\tau}}{200}=0.74\;.$$

В исходном узле за 5 дней до экспирации стоимость опциона оказывается равна $225e^{-5r\tau}=225e^{-rT}\cong 214$, пропорционально уменьшается и коэффициент $\Delta=0.81e^{-rT}\cong 0.77$.

При реализации арбитражной стратегии в случае отклонения цены опциона от рассчитанной стоимости для получения «запланированного» результата необходимо, чтобы процентная ставка была постоянной за время существования опциона (либо известной функцией времени - тогда в описанной пошаговой процедуре обсчет каждого слоя ведется по той ставке, которая сложится в соответствующий будущий момент). Возможность ошибки в прогнозе процентных ставок на будущее вносит свой вклад в неопределенность результатов операций с опционами.

Более детальный анализ требует учета различия ставок привлечения и размещения. Пусть трейдер имеет возможность привлекать средства под процент $r_{\text{П}}=360\%$ и размещать под процент $r_{\text{Р}}=180\%$. Этим ставкам соответствуют начальные стоимости $225e^{-r_{\text{П}}T}=214$ и $225e^{-r_{p}T}=220$. Предположим, что опцион продается по цене 220. Тогда наилучшим исходом для продавца будет нулевой результат, то есть отсутствие как прибылей, так и убытков. Действительно, если траектория движения фьючерсной цены такова, что даже при возникновении отрицательной вариационной маржи остаток на счете всегда положителен, то на остатки на счете ежедневно будет начисляться процент, исходя из ставки размещения. Поскольку и начальная цена соответствует этой ставке, то стоимость портфеля будет поддерживаться на нулевом уровне. Если, однако, в какие-то моменты будут возникать отрицательные остатки на счетах, то заимствование будет осуществляться под больший процент, и результатом операции будут убытки. Тем самым продажа опциона по цене 220 в лучшем случае позволит остаться «при своих». Аналогичная ситуация возникает при покупке опциона по цене 214. Таким образом, при условии $r_{\text{Р}}<r_{\text{П}}$ в ценах опциона возникает зазор, в котором невозможно получение арбитражной прибыли. В реальной ситуации, кроме того, необходимо учитывать другие факторы, не включенные в этот упрощенный анализ: налоги, комиссионные, начальную маржу и т. п.■

Алгоритм расчетов

Для практического применения биномиального метода необходимо более точно, чем это изображено на рис. 5.2, 5.3, формировать сетку движения цены. В соответствии с биномиальным вариантом уравнения (3.3) из начальной точки $F_0=F$ скачок цены через интервал времени τ может быть осуществлен в два положения:

$$F_1^{\Uparrow}=F_0e^{\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}},\qquad F_1^{\Downarrow}=F_0e^{\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}}.\tag{5.7}$$

В дальнейшем каждый новый узел становится начальным и процедура расчета узлов повторяется. При движении в обратном по времени направлении теоретическая стоимость опциона в каждом узле и коэффициент дельта для европейского опциона на фьючерс с уплатой премии определяются по формулам

$$C_k^{фес}=e^{-r\tau}[pC_{k+1}^{фес\Uparrow}+(1-p)C_{k+1}^{фес\Downarrow}],$$

$$\Delta_k^{фес}=\frac{C_{k+1}^{фес\Uparrow}-C_{k+1}^{фес\Downarrow}}{F_{k+1}^{\Uparrow}-F_{k+1}^{\Downarrow}},$$

где $C_{k+1}^{фес\Uparrow},C_{k+1}^{фес\Downarrow}$ - стоимость опциона в узлах $F_{k+1}^{\Uparrow},F_{k+1}^{\Downarrow}$ соответственно,

$$p=\frac{F_k-F_{k+1}^{\Downarrow}}{F_{k+1}^{\Uparrow}-F_{k+1}^{\Downarrow}}=\frac{1-e^{\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}}}{e^{\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}}-e^{\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}}}.$$

Эти соотношения являются следствием простых геометрических пропорций (рис. 5.4). Количество необходимых фьючерсных позиций - $\Delta_k^{фес}$ подбирается из тех соображений, чтобы вариационная маржа скомпенсировала различие стоимостей опциона в двух следующих узлах. В результате происходит уравнивание столбиков справа и слева, и «равновесное» значение с учетом дисконтирования дает стоимость опциона $C_k^{фес}$.

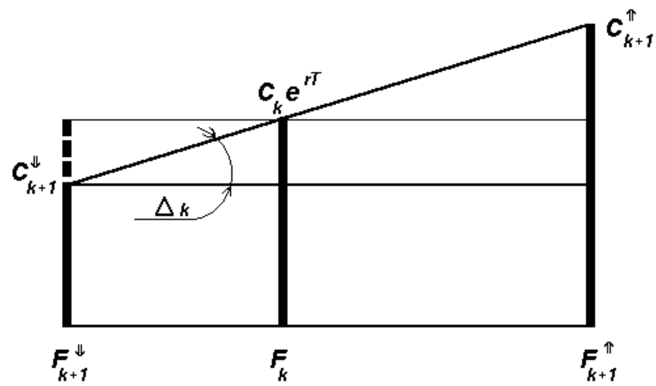


Рис. 5.4. Построение Δ-нейтрального портфеля

Случай опциона на акцию отличается тем, что фьючерсная позиция заменяется на покупку или продажу без покрытия определенного количества акций. При этом различие методов расчета по фьючерсам и акциям вносит определенные коррективы в способ расчета стоимости опциона и коэффициента Δ в каждом узле. Аналогичное замечание относится к опционам на валюту. Результаты имеют следующий вид:

- для бездивидендной акции $C_k^{аес}$, $\Delta_k^{аес}$ определяются аналогично вышеприведенным выражениям с заменой фьючерсной котировки F на цену акции S и параметра p на

$$p = \frac{e^{r\tau} - e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}}}{e^{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}} - e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}}};$$

- для валюты

$$\Delta_k^{вес} = e^{-r_в\tau}\frac{C_{k+1}^{вес\Uparrow} - C_{k+1}^{вес\Downarrow}}{S_{k+1}^{\Uparrow} - S_{k+1}^{\Downarrow}}, \qquad p = \frac{e^{(r-r_в)\tau} - e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}}}{e^{\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}} - e^{\mu\tau - \sigma\sqrt{\tau}}},$$

где S обозначает курс валюты.

Для того чтобы биномиальным методом получить стоимость опциона пут, необходимо лишь изменить граничное значение на дату экспирации: вместо стоимости опциона колл C_T использовать стоимость опциона пут P_T.

Во всех трех рассмотренных случаях оказывается, что результирующие выражения для теоретической стоимости опционов колл и пут в начальном узле допускают аналитическую, хотя и довольно громоздкую, запись. При этом выявляется принципиально важное обстоятельство: если измельчать сетку, то есть уменьшать τ, то в предельных выражениях коэффициент сноса μ отсутствует. Тем самым теоретическая стоимость опциона не зависит от μ, о чем было упомянуто выше. Механизм «выпадения» μ из окончательных формул далеко не столь очевиден, как, например, причины отсутствия μ в выражении для стоимости форвардного контракта (4.1). Не прибегая к формальным доказательствам, можно лишь отметить, что это является следствием Δ-нейтральности (безрисковости) портфеля, в силу которой направление изменения цены базисного актива оказывается безразличным.

Поскольку биномиальная модель движения цены тем точнее описывает непрерывное изменение цены, чем меньше τ, то в действительности интерес представляет именно предельное выражение. При этом коэффициент μ с самого начала не учитывают при расчетах, а здесь его присутствие обусловлено лишь логикой получения результата - таким образом,

<u>в выражениях данного раздела необходимо положить $\mu=0$.</u>

Практически биномиальный метод, конечно, не имеет смысла применять в рассмотренных трех случаях, так как имеются компактные аналитические результаты. Смысл появляется, например, при расчете цен американских опционов. Соответствующие поправки к алгоритму расчетов будут даны ниже.

Интересно, что идея биномиального метода может быть применена в ситуациях, далеких от торговли опционами.

► Две команды играют серию матчей до 4 побед одной из команд. Ничьи отсутствуют, так что может быть сыграно не более 7 матчей. Два болельщика перед каждой игрой заключают пари, которое выигрывает тот, чья команда победила в данной игре. Ставка в каждом из пари подбирается таким образом, чтобы независимо от того, сколько матчей будет сыграно, болельщик победившей во всей серии команды суммарно выиграл 100 рублей. Чему равна ставка в первой игре?◄

<u>ГЛАВА 6.</u> ФОРМУЛА БЛЭКА-ШОУЛСА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ

6.1. ЕВРОПЕЙСКИЙ ОПЦИОН КОЛЛ НА БЕЗДИВИДЕНДНУЮ АКЦИЮ

Предельное выражение для C^{aec}, о котором шла речь в предыдущей главе, является ничем иным как знаменитой формулой Блэка-Шоулса. Авторы получили ее методом, основанным на теории случайных процессов. Эта формула для стоимости европейского опциона колл на бездивидендную акцию с уплатой премии имеет вид:

$$C^{aec} = e^{-rT}[Se^{rT}N(d_1) - EN(d_2)] = SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2), \tag{6.1}$$

где E - страйк, S - текущая цена акции,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{Se^{rT}}{E}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{Se^{rT}}{E}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$N(x)$ - функция стандартного нормального распределения. Выражения для d_1, d_2 допускают очевидное упрощение вынесением экспоненты из-под знака логарифма, однако приведенное представление позволяет, во-первых, заменить непрерывно начисляемый процент обычным (см. главу 3), во-вторых, в дальнейшем легко модифицировать эту базовую формулу применительно к остальным вариантам опционов.

Сравнение (6.1) с (5.3) показывает, что здесь $Se^{\mu T}$ заменено на Se^{rT}. Так же, как и в главе 4, это является следствием определенной активности покупателя или продавца опциона. Однако имеется и существенное различие: если формулы главы 4 основаны на арбитражных стратегиях, по крайней мере теоретически гарантирующих результат, то описанные в предыдущей главе стратегии зависят от точности прогноза будущей истинной волатильности σ. Если волатильность σ оценена неверно, то неправильными будут расчетные стоимости опциона и коэффициенты Δ, вследствие чего результат операции не совпадет с ожидаемым и будет зависеть от случайных факторов.

6.2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Перечислим все условия, при которых справедлива формула (6.1):

- выполнены предположения о процентных ставках главы 3;
- динамика цены базисного актива в течение срока действия опциона описывается уравнением (3.3) с постоянными μ и σ;
- рынок базисного актива абсолютно ликвиден - в любой момент имеется возможность купить или продать без покрытия любое, в том числе дробное, количество акций;
- средства, полученные от продажи акций без покрытия, могут быть использованы в полном объеме;
- спрэд между рыночными ценами покупки и продажи акций пренебрежимо мал;
- комиссионные и налоги равны нулю;
- по акции не выплачиваются дивиденды за время существования опциона;
- на рынке отсутствуют безрисковые арбитражные возможности;
- торговля осуществляется непрерывно.

Очевидно, что эти предположения являются идеализацией реальной рыночной ситуации. В дальнейшем будут сделаны некоторые замечания, связанные с возможными отклонениями принятой модели от действительности.

6.3. МОДИФИКАЦИИ ФОРМУЛЫ БЛЭКА-ШОУЛСА

Европейский опцион колл на дивидендную акцию

В предположениях относительно дивидендов по акции, при которых получена формула (4.2), в формуле Блэка-Шоулса необходимо заменить S на $S^{див}$.

Европейский опцион колл на валюту

Формула для $C^{вес}$ - европейского опциона колл на валюту - получается из (6.1) заменой выражения Se^{rT} на $Se^{(r-r_в)T}$ (см. (4.3)).

Европейский опцион колл на фьючерс с уплатой премии

Формула Блэка для $C^{фес}$ отличается от (6.1) заменой выражения Se^{rT} на F - текущую фьючерсную котировку. Если при этом сроки истечения действия фьючерсного контракта и опциона не совпадают, то в формулу, как обычно, следует подставлять оставшееся время существования опциона.

Европейский опцион колл на фьючерс без уплаты премии

В соответствии с предыдущим пунктом и соотношением (4.4) формула для $C^{феб}$ имеет вид:

$$C^{феб} = FN(d_1) - EN(d_2), \tag{6.2}$$

где E - страйк, F - текущая фьючерсная котировка,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Таким образом, $C^{феб}$ отличается от $C^{фес}$ отсутствием дисконтирующего множителя e^{-rT} перед всем выражением.

6.4. ЕВРОПЕЙСКИЙ ОПЦИОН ПУТ

В разделе 5.1 получена однозначная связь (5.6) стоимостей европейских опционов колл и пут на бездивидендную акцию на одном страйке, причем это соотношение не зависит от модели движения цены. Это выражение легко переносится на все остальные варианты европейских опционов с уплатой премии заменой Se^{rT} на соответствующие выражения аналогично тому, как это было сделано для опциона колл в предыдущем разделе.

Для опциона на фьючерс это тождество можно интерпретировать как невозможность получения арбитражной прибыли за счет конверсии или реверсии (см. раздел 2.7, а также главу 11). Действительно, в случае реверсии сумма, получаемая в день экспирации, равна $F - E$, следовательно, в момент $t = 0$ эта позиция должна стоить $e^{-rT}[F - E]$.

Для европейского опциона на фьючерс без уплаты премии ситуация, как всегда, упрощается:

$$C^{феб} - P^{феб} = F - E. \tag{6.3}$$

<u>ГЛАВА 7.</u> ГРАФИКИ СТОИМОСТИ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

7.1. ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ НА ФЬЮЧЕРС БЕЗ УПЛАТЫ ПРЕМИИ

На рис. 7.1, 7.2 приведены кривые стоимости европейских опционов колл и пут на фьючерс без уплаты премии, построенные по формулам (6.2), (6.3). Указанные на этом и следующих рисунках даты означают текущую дату, для которой построена кривая теоретической стоимости опциона, и дату экспирации опциона.

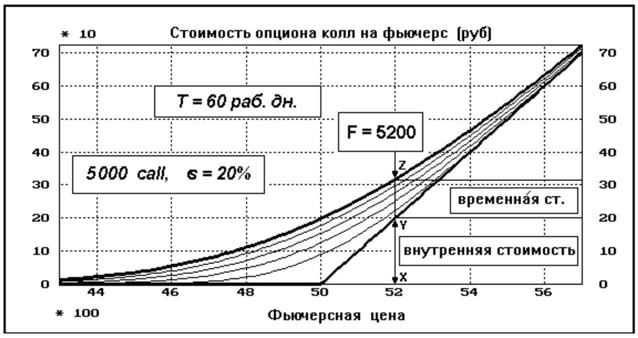


Рис. 7.1. Стоимость европейского опциона колл на фьючерс без уплаты премии

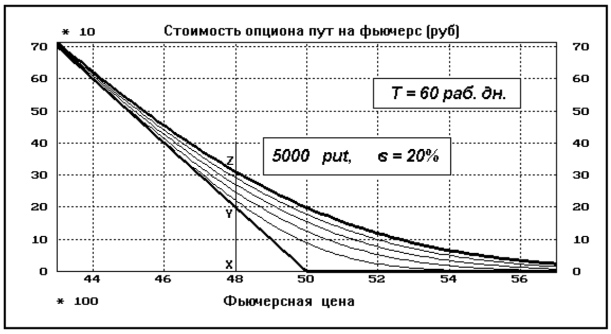


Рис. 7.2. Стоимость европейского опциона пут на фьючерс без уплаты премии

В главе 2 отрезок *XY* был назван внутренней стоимостью опциона *(intrinsic value).* Отрезок *YZ* называется внешней или временно́й стоимостью *(extrinsic* или *time value).* Для опциона на деньгах или вне денег внутренняя стоимость равна нулю, а вся его стоимость является внешней или временной. По мере приближения срока экспирации временная стоимость убывает до нуля, то есть график стоимости опциона постепенно приближается к ломаной, изображающей внутреннюю стоимость. Дополнительные тонкие линии изображают стоимость опциона в моменты, которые равномерно делят весь период действия опциона. Видно, что по мере приближения срока экспирации стоимость опциона на деньгах убывает быстрее за один и тот же промежуток времени.

Рис. 7.3 качественно поясняет происхождение временной составляющей премии по опциону. В предположении, что фьючерсная котировка равна 5000 и ожидается рост котировки, рассмотрим следующие варианты:

- покупку фьючерсного контракта;
- покупку опциона колл на страйке 4000.

Прямая, пересекающая горизонтальную ось в точке 5000, изображает прибыли/убытки по длинной фьючерсной позиции. Предположим, опцион может быть куплен за 1000, тогда прибыли/убытки по опциону изображаются ломаной *XYZ*. При цене базисного актива S_T, большей 4000, прибыли/убытки по опциону совпадают с прибылями/убытками по фьючерсной позиции, а при $S_T < 4000$ убыток по опциону ограничен уровнем 1000 и меньше убытка по фьючерсной позиции. Очевидно, что с точки зрения покупателя такой опцион выгоднее фьючерсной позиции. Однако продавать опцион с премией 1000 не имеет смысла, поскольку это означает одинаковые убытки и ограничение потенциальной прибыли по сравнению с фьючерсной позицией. Тем самым этот опцион будет продаваться дороже его внутренней стоимости, скажем, за 1100, а покупатель будет готов пожертвовать частью своих потенциальных прибылей ради «подстраховки» - ограничения возможных убытков размером уплаченной премии. Таким образом, реально ломаная прибылей/убытков может выглядеть как линия, помеченная на рисунке «*4000 call*». Точка B_1 *(breakeven point* – точка безубыточности или, проще, «при своих») - лежит правее точки *F*.

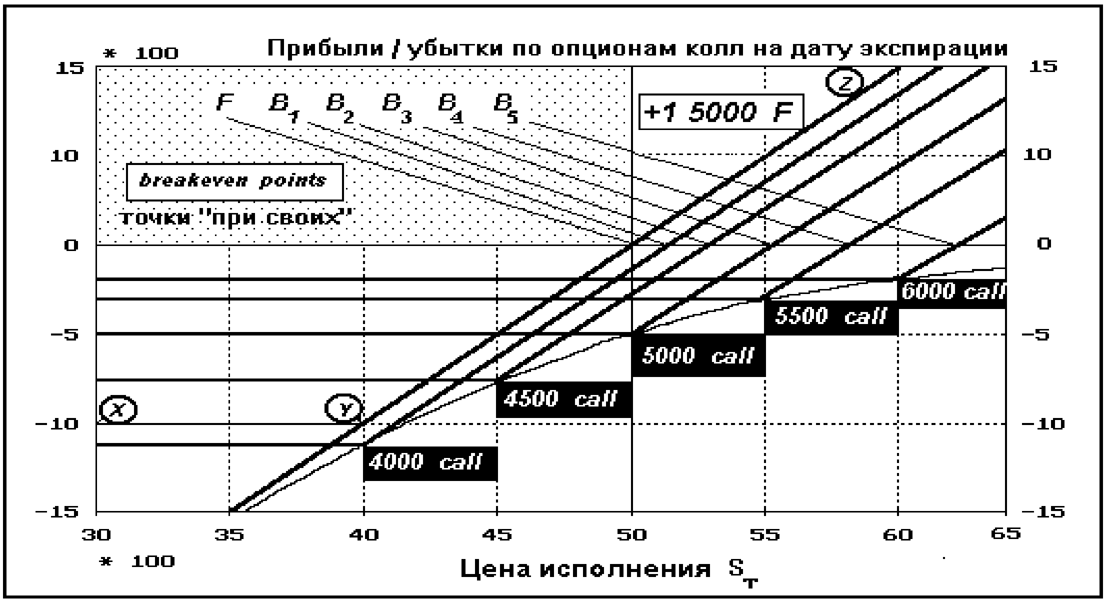


Рис. 7.3. Прибыли/убытки по опционам колл на фьючерс
на дату экспирации

Подобное же сравнение опциона на страйке 4000 и опциона на страйке 4500 показывает, что точка «при своих» B_2 второго из них должна располагаться правее B_1. Для опционов пут картина противоположная (рис. 7.4): чем меньше страйк, тем левее находится точка безубыточности.

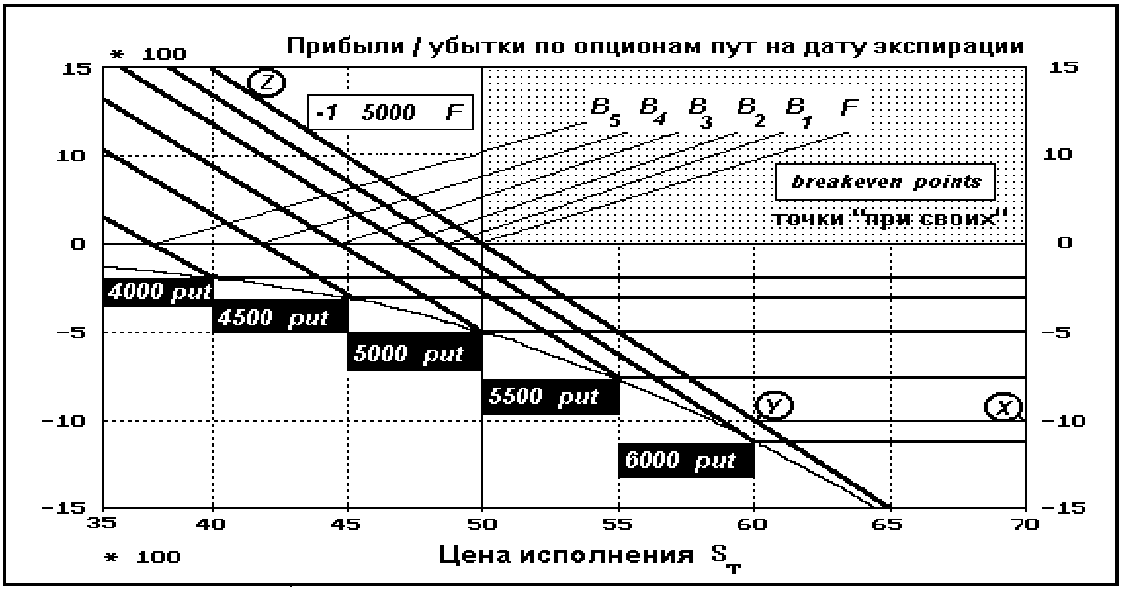


Рис. 7.4. Прибыли/убытки по опционам пут на фьючерс
на дату экспирации

Используя понятие временно́й стоимости, соотношение (6.4) можно сформулировать следующим образом: временные стоимости европейских опционов колл и пут на одном страйке равны, в частности, полные стоимости европейских опционов колл и пут строго на деньгах равны.

График стоимости опциона лежит тем выше, чем больше величина $\sigma\sqrt{T}$, то есть чем больше волатильность и срок действия опциона. Этот вывод подкрепляется следующими упрощенными соображениями качественного характера. Предположим, что фьючерсная котировка равна 5000, и продавец определяет цену, по которой он готов продать опцион колл на страйке 6000. Чем больше вероятность того, что цена базисного актива на день экспирации превысит 6000, тем выше будет предложение на продажу. И наоборот, чем спокойнее рынок и чем меньше шансов у покупателя опциона на рост котировки выше 6000, тем ниже будет его предложение на покупку опциона.

Наконец, стоит отметить, что стоимость опциона колл не может быть выше фьючерсной цены, так как подстраховка на таком уровне не имеет смысла. Для опциона пут стоимость не превышает страйковой цены.

7.2. ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ С УПЛАТОЙ ПРЕМИИ

Эти графики (рис. 7.5, 7.6) отличаются от графиков рис. 7.1, 7.2 тем, что учитывают дисконтирующий множитель e^{-rT} и расположены пропорционально ниже.

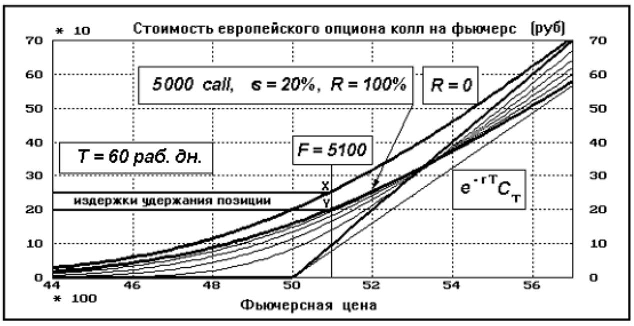


Рис. 7.5. Стоимость европейского опциона колл на фьючерс с уплатой премии

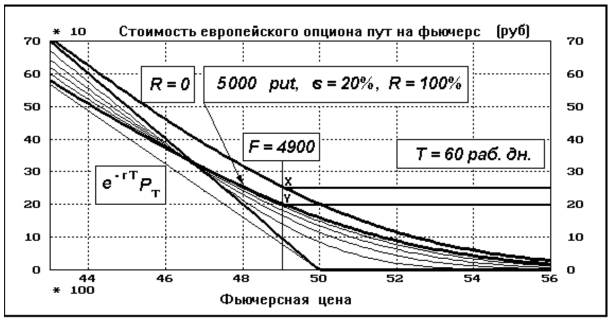


Рис. 7.6. Стоимость европейского опциона пут на фьючерс с уплатой премии

Отрезок *XY* называется издержками удержания позиции (*carrying cost*) и показывает:

- для покупателя - упущенную прибыль, которая могла бы быть получена от размещения уплаченной премии под безрисковый процент *r;*
- для продавца - реально возможную прибыль от размещения полученной премии.

Для опционов глубоко в деньгах временна́я стоимость отрицательна.

7.3. ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ НА БЕЗДИВИДЕНДНУЮ АКЦИЮ

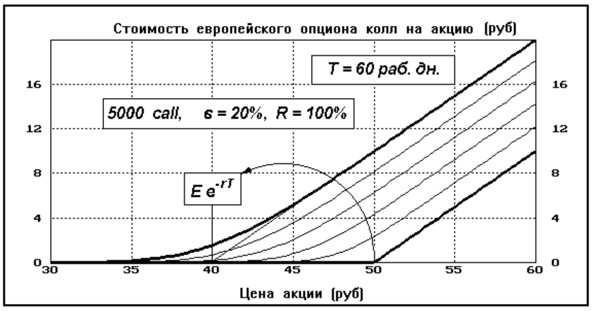


Рис. 7.7. Стоимость европейского опциона колл на бездивидендную акцию

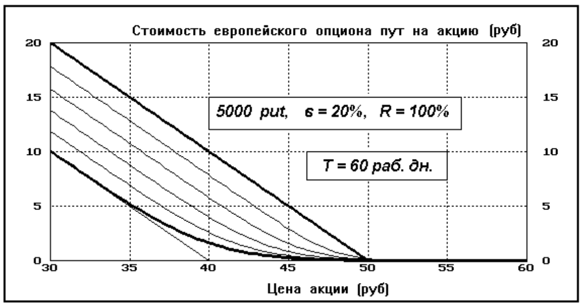


Рис. 7.8. Стоимость европейского опциона пут на бездивидендную акцию

Данные графики (рис. 7.7, 7.8) ближе к графикам рис. 7.1, 7.2, однако сдвинуты влево так, что асимптоты выходят не из страйковой цены *E*, а из точки Ee^{-rT}. При этом стоимость опциона колл всегда выше внутренней стоимости опциона, что окажется существенным при рассмотрении американских опционов.

7.4. ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ НА ДИВИДЕНДНУЮ АКЦИЮ

Этот случай отличается от предыдущего тем, что вместо S в формуле стоит меньшая величина $S^{див}$, то есть графики сдвигаются вправо на $S - S^{див}$ (при той же текущей стоимости акции S опцион колл стоит дешевле, а опцион пут дороже, чем в случае бездивидендной акции).

7.5. ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ НА ВАЛЮТУ

Эти графики объединяют в себе черты графиков 7.3, 7.4 и 7.5, 7.6: точка пересечения асимптот сдвинута и асимптоты расположены не под 45°, а более полого. Сдвиг точки пересечения асимптот происходит влево, если процентная ставка по рублевым вложениям больше, чем по валютным, и вправо в противном случае. Рисунки соответствуют второму варианту, когда ставка по 3-месячным рублевым вложениям *R*=100% меньше валютной ставки $R_{валюты}$=200%.

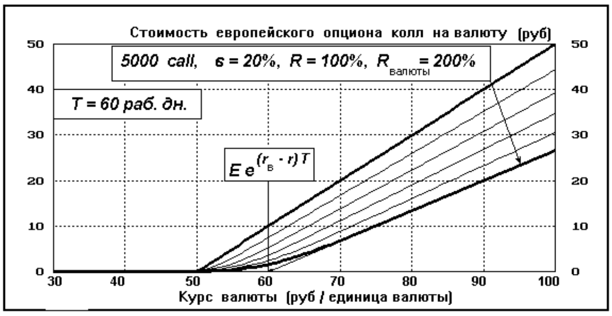


Рис. 7.9. Стоимость европейского опциона колл на валюту

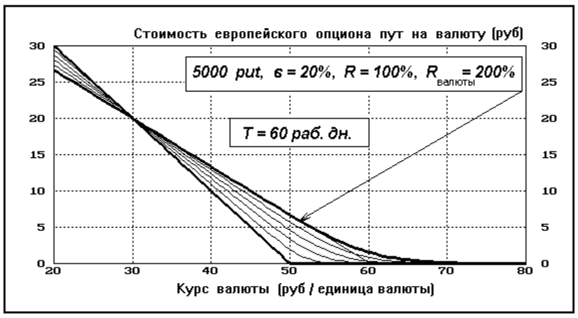


Рис. 7.10. Стоимость европейского опциона пут на валюту

<u>ГЛАВА 8.</u> АМЕРИКАНСКИЕ ОПЦИОНЫ

8.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД

Американский опцион предоставляет владельцу дополнительные права по сравнению с европейским, и это должно отразится в увеличении премии. Очевидно, что стоимость американского опциона не может быть меньше его внутренней стоимости (см. замечание к рис. 2.1, 2.2). В тех случаях, когда график теоретической стоимости европейского опциона целиком лежит выше ломаной, изображающей внутреннюю стоимость опциона, дополнительные права по американскому опциону являются как бы излишними - раннее исполнение опциона приводит к потере временной стоимости. Тем самым стоимости американских опционов колл и пут на фьючерсы без уплаты премии, а также стоимость американского опциона колл на бездивидендную акцию совпадают со стоимостями соответствующих европейских опционов. В остальных случаях американские опционы требуют отдельного рассмотрения.

Биномиальный метод позволяет рассчитывать стоимость не только европейских, но и американских опционов. Продолжая пример 5.1 (раздел 5.2), предположим, что r=360%. Для стоимости европейского опциона в узле 5000 за день до экспирации было получено значение $50\,e^{-r\tau} \cong 49.5$. Это значение необходимо сравнить с внутренней стоимостью опциона и в качестве стоимости американского опциона взять наибольшее из двух. Поскольку внутренняя стоимость опциона в узле 5000 равна нулю, то стоимость американского опциона совпадает со стоимостью европейского: 49.5. Однако в следующем узле 5200 ситуация меняется: стоимость европейского опциона равна $200\,e^{-r\tau} \cong 198$, а внутренняя стоимость 200, следовательно, американский опцион должен стоить 200. Продолжая расчеты, в исходной точке для стоимости американского опциона получаем 219, тогда как европейский опцион при тех же условиях стоил 214.

Графики стоимости американских опционов на фьючерс с уплатой премии $C^{фес}$, $P^{фес}$ изображены на рис. 8.1, 8.2. Результаты получены биномиальным методом при количестве шагов в решетке n=50. На каждом из графиков выделяется критическая точка *U, к*оторая делит график на две части. Для опциона колл правая, а для опциона пут левая часть графика прямолинейны и совпадают с графиком внутренней стоимости. Для сравнения в том же масштабе изображены также кривые стоимости европейских опционов с уплатой и без уплаты премии.

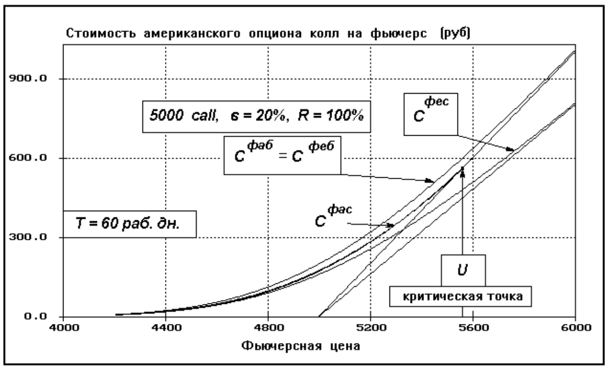


Рис. 8.1. Стоимость американского опциона колл на фьючерс с уплатой премии

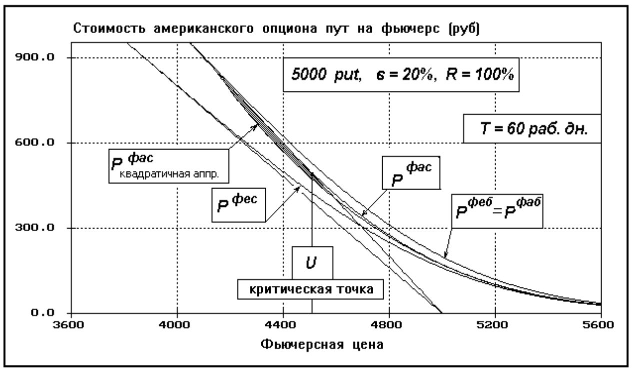


Рис. 8.2. Стоимость американского опциона пут на фьючерс с уплатой премии

8.2. КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Наряду с биномиальным методом для определения стоимости американских опционов используется так называемая квадратичная аппроксимация (предложенная в работах *Macmillan/ Barone-Adesi* и *Whaley).* Это приближенные аналитические соотношения, которые получаются при некотором упрощении исходной задачи. Соответствующие формулы приведены в приложении Б.

Кривые, полученные этим методом, показаны на тех же рис. 8.1, 8.2. При этом для опциона колл результаты биномиального метода и квадратичной аппроксимации практически совпадают. Для опциона пут аппроксимация на некотором участке значительно отклоняется вниз от точного графика и лежит даже ниже внутренней стоимости опциона. Очевидно, что для улучшения результата на этом участке следует вместо аппроксимации брать внутреннюю стоимость.

<u>Пример 8.1.</u> Рассмотрим более подробно европейский и американский опционы колл на фьючерс с уплатой премии на страйке 5000 с экспирацией через 3 месяца в одной точке - при фьючерсной цене 5000 (по-прежнему 3-х месячная ставка R=100%, волатильность σ=20%).

Формула Блэка в этом случае дает для европейского опциона $C^{фес} = 168.3$. Для стоимости американского опциона квадратичная аппроксимация равна $C^{фас} = 179.86$, а критическая точка $U = 5570$.

В таблице 8.1 приведены стоимости европейского и американского опционов, полученные биномиальным методом. Параметр *n* обозначает количество шагов, на которое разбивается срок действия опциона при построении решетки.

n	10	20	30	40	50	100	200
$C^{фес}$	173.3	170.6	169.8	169.4	169.2	168.7	168.5
$C^{фас}$	181.7	179.5	178.7	178.4	178.2	177.8	177.6

Таблица 8.1. Стоимости опционов, рассчитанные биномиальным методом

Строка таблицы для $C^{фес}$ в сопоставлении с точным значением $C^{фес}$ подтверждает, что биномиальный метод в пределе дает такой же результат, как и соответствующая модификация формулы Блэка-Шоулса. Последняя строка показывает, что точное предельное значение стоимости американского опциона находится в районе 177.4, то есть ошибка квадратичной аппроксимации составляет 1.5%. Рассчитанное биномиальным методом при *n*=200 значение $C^{фас}$ в критической точке квадратичной аппроксимации 5570 равно 575 (вместо 570 - ошибка около 1%), а точная критическая точка 5650.

Практически, однако, погрешностями порядка нескольких процентов можно пренебречь, поскольку такой или большей является разность цен спроса и предложения. Считается, что в биномиальном методе достаточно разбить срок действия оцениваемого опциона на 20 - 30 шагов для получения удовлетворительного результата.■

8.3. АМЕРИКАНСКИЙ ОПЦИОН НА ДИВИДЕНДНУЮ АКЦИЮ

Отдельно следует остановиться на особенностях американских опционов на дивидендную акцию. Биномиальный метод позволяет рассчитывать стоимость опционов и в этом случае. Простейший вариант исходных условий состоит в том, что заранее известен день выплаты дивидендов, после которого цена акции скачкообразно уменьшается на заранее известную величину. При этом возникает сложность формального характера, связанная с тем, что в отличие от упрощенного примера 5.1 в точном методе узлы решетки расположены неравномерно по цене (см. (5.7)), и одинаковый сдвиг в определенный момент во всех узлах приводит к рассогласованию решетки и резкому нарастанию количества узлов в последующем. Один из путей возможного решения проблемы состоит в том, чтобы несколько модифицировать решетку и с этой целью представить цену акции в любой момент существования опциона как сумму двух компонентов: регулярной составляющей, отражающей приведенные к текущему моменту будущие дивиденды за время существования опциона, и остальной части цены акции (ср. с (4.2)). Предполагается, что изменение только этой остальной части носит случайный характер и описывается биномиальной моделью. Так, если до экспирации опциона остается $T = m\tau$ (τ - шаг решетки по времени) и за этот период предполагается выплата одного дивиденда размера d в момент t, причем $k\tau < t < (k+1)\tau$, то значения цены акции в узлах решетки определяются по правилу:

- в моменты $i\tau < t$: $[S_0 - de^{-r(t-i\tau)}]v^j w^{i-j} + de^{-r(t-i\tau)}$;
- в моменты $i\tau > t$: $[S_0 - d]v^j w^{i-j}$, где $j = 0,1,..., i;$ $v = e^{\sigma\sqrt{\tau}}$, $w = e^{-\sigma\sqrt{\tau}}$.

Для приближенного аналитического расчета стоимости опциона колл применяются также следующие рассуждения: предполагается, что если и целесообразно проводить досрочное исполнение опциона, то только непосредственно перед выплатой дивидендов. Исходя из этого достаточно сравнить стоимость европейского опциона с исполнением в дату экспирации со стоимостями европейских опционов колл, сроки действия которых истекают непосредственно перед датами выплаты дивидендов, и выбрать наибольшую из получившихся величин в качестве стоимости американского опциона.

Еще один вариант анализа стоимости опциона состоит в том, чтобы изменить исходную посылку: считать, что вместо величины дивидендов заданы ставки дивидендов, то есть отношения размера дивиденда к цене акции на момент выплаты дивиденда. В этом случае после выплаты дивиденда узлы пропорционально смещаются вниз без нарушения решетки в последующем.

Для стоимости американского опциона колл на акцию, по которой за время существования опциона предполагается выплата одного дивиденда, в [10] приведено точное, хотя и довольно громоздкое, аналитическое выражение.

Американский опцион пут с точки зрения досрочного исполнения обладает свойством, которое не присуще опциону колл. Предположим, что имеется длинная позиция по опциону пут на акцию с экспирацией через 6 месяцев, страйк равен 5000, процентная ставка r=24%. Если к этому моменту цена акции упала, скажем, до 500, то исполнить такой опцион досрочно заведомо выгоднее, чем ожидать дня экспирации. Купив акцию по 500, потребовав исполнения опциона и поставив ее по цене 5000, можно разместить полученную прибыль под проценты с результатом ко дню экспирации $4500e^{rT} = 4500e^{0.12} \cong 5074$, что больше максимально возможных 5000 на день экспирации. Естественно, не обязательно исполнять опцион, если есть основания предполагать, что цена акции снизится еще сильнее, - необходимо выбрать момент, когда выражение $(E - S)e^{rT}$ окажется максимальным (T – время, оставшееся до экспирации).

ГЛАВА 9. СТОИМОСТЬ ПОРТФЕЛЯ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В этой и последующих главах для определенности речь идет об опционах на фьючерс без уплаты премии. Считается, что фьючерс является расчетным, а дата экспирации опционов совпадает с датой исполнения фьючерсов. Остальные варианты по существу аналогичны.

Далее под портфелем будем понимать открытые фьючерсные позиции с определенной датой исполнения и опционы на данный фьючерсный контракт, а также возникшие в результате выплат вариационной маржи рублевые средства (отрицательные означают задолженность). Рассмотрим следующий портфель с исполнением 15 июня, в котором позиции открыты 30 апреля:

- 3 коротких фьючерсных позиции по цене 5050;
- 100 длинных позиций по опциону колл на страйке 5100 по цене 47;
- 100 длинных позиций по опциону пут на страйке 5000 по цене 47.

Для того чтобы получить эти цены опционов по формулам (6.2), (6.3), в них необходимо подставить σ=10%, то есть опционная волатильность в данном случае равна 10%.

Пусть прогноз волатильности фьючерсной цены на оставшийся период действия опциона равен 20%, тогда теоретическая стоимость опциона колл равна 116, а опциона пут 115. Суммарная стоимость опционов превышает их суммарную цену на

$$100*(116+115)-100*(47+47)=13700.$$

Эта величина показывает потенциальную прибыль, «содержащуюся» в позиции при условиях: 1) правильности прогноза волатильности; 2) применения динамического хеджа. Будем называть эту величину потенциальной прибыльностью/убыточностью позиции (сокращенно ППУ позиции).

Определим стоимость портфеля как сумму стоимости позиции и рублевых средств, возникших в результате ежедневной корректировки позиций по рынку, а также, возможно, начисления процентов на остатки.

Пусть на конец торгового дня расчетные цены оказались равны: по фьючерсам 5000, по опционам колл 30, по опционам пут 70. Опционная волатильность, соответствующая этим ценам, та же - 10%. Вариационная маржа по итогам дня положительна:

$$(-3*5000+100*30+100*70)-(-3*5050+100*47+100*47)=750.$$

В результате портфель состоит из этой денежной суммы и скорректированных по рынку позиций по фьючерсам и опционам. Стоимости опционов, соответствующие σ=20%, при этом равны 95 для опциона колл и 137 для опциона пут, а ППУ позиции составляет

$$100*(95+137)-100*(30+70)=13200.$$

С учетом вариационной маржи ППУ портфеля на конец дня равна 13200+750=13950. Заметим на будущее, что ППУ портфеля возросла на 250 по сравнению с первоначальной 13700.

Игнорируя разбиение на денежную составляющую и ППУ открытых позиций, ППУ портфеля можно получить проще, отталкиваясь от исходных цен открытия позиций:

$$(-3*5000+100*95+100*137) - (-3*5050+100*47+100*47)=13950.$$

На рис. 9.1 изображен график позиции на конец дня. Ломаная *XX* показывает суммарные прибыли/убытки, которые будут получены на день экспирации (в дополнение к уже начисленной вариационной марже) при условии сохранения позиции неизменной. Эта ломаная является суммой графиков вида 1.2, 2.5, 2.6, если считать, что фьючерсные позиции открыты по цене 5000, опционы колл куплены по цене 30, опционы пут - по цене 70.

Линия *YY* построена в расчете на опционную волатильность σ=10%. На текущей фьючерсной котировке 5000 эта линия проходит через ноль, как и должно быть для опционной волатильности (при этой волатильности теоретическая стоимость опционов совпадает с реальной ценой). В случае немедленного закрытия всех позиций по расчетным ценам дня никаких дополнительных прибылей или затрат не будет. Для других фьючерсных цен линия *YY* показывает прибыли/убытки при условии «замораживания» остальных ценообразующих параметров - времени и волатильности. Вопросы, связанные с опционной волатильностью, рассматриваются подробнее в следующей главе.

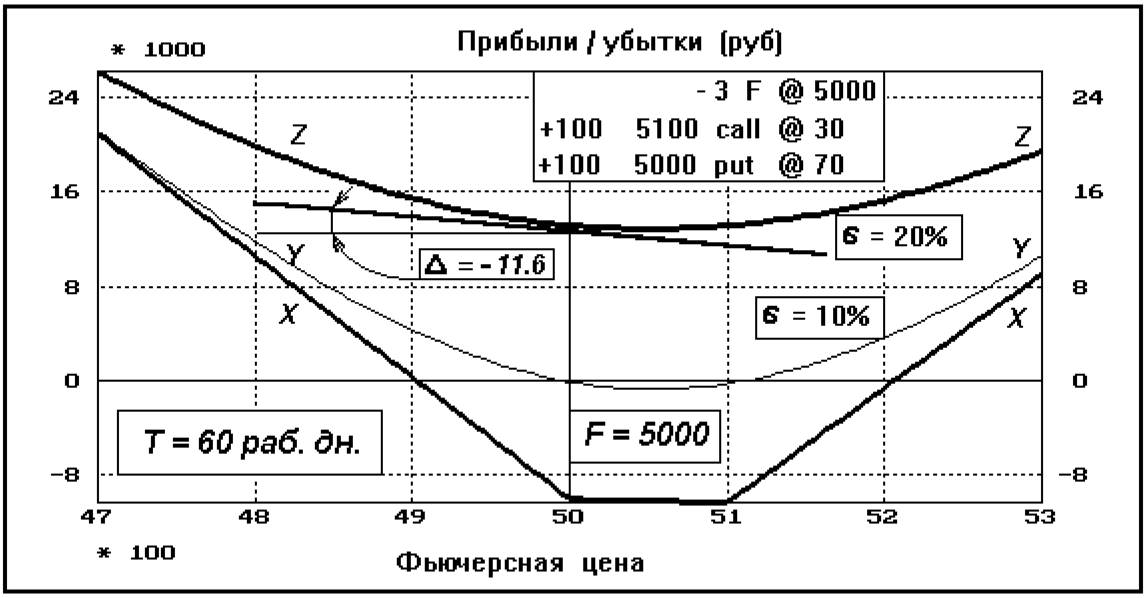


Рис. 9.1. Суммарный график открытой позиции

Линия *ZZ* изображает ППУ позиции при прогнозируемой волатильности σ=20%. В частности, значение графика *ZZ* на текущей фьючерсной котировке равно 13200.

Наряду с приведенным графиком открытой позиции часто используют график портфеля, в котором фьючерсы и опционы изображают исходя из первоначальных цен открытия позиций - 5050 для фьючерсов и 47 для опционов, в этом случае ломаная *XX* является статичной и не меняется. Для такого графика портфеля в любой из дней линия *YY*, построенная в соответствии с текущей опционной волатильностью, на расчетной цене фьючерса показывает накопленную к этому моменту суммарную вариационную маржу - что удобно. Введенное выше разделение стоимости портфеля на денежную составляющую и стоимость позиции целесообразно только в том случае, когда на остатки на счете начисляется процент и денежная составляющая портфеля не является простой суммой ежедневных прибылей/убытков.

► Проверить, что для получения графика портфеля на рис. 9.1 достаточно сдвинуть линии *XX, YY, ZZ* вверх на 750, то есть учесть полученную вариационную маржу.◄

Построим к линии *ZZ* в точке 5000 касательную. Касательная в некоторой окрестности 5000 достаточно точно описывает изменение стоимости позиции и, следовательно, стоимости портфеля, вызванное смещением фьючерсной котировки. Представим себе второй портфель, состоящий только из фьючерсных позиций в таком количестве, что график прибылей/убытков по этому портфелю имеет тот же наклон, что и касательная. Количество фьючерсных позиций во втором портфеле является важной характеристикой первого портфеля и носит название коэффициента дельта Δ или коэффициента хеджа. Если $\Delta > 0$, то позиция называется длинной рыночной позицией, если $\Delta < 0$, то короткой рыночной позицией, и при $\Delta = 0$ - дельта-нейтральной или безрисковой позицией.

Коэффициент хеджа Δ равен тангенсу угла наклона касательной. Если портфель состоит из одной длинной фьючерсной позиции, то $\Delta = 1$, если из одной короткой, то $\Delta = -1$. Для одной длинной позиции по опциону колл Δ меняется от 0 для опциона глубоко вне денег (то есть когда цена базисного актива мала по сравнению со страйком) до 1 для опциона глубоко в деньгах. На деньгах значение Δ приблизительно равняется 0.5. Для одной длинной позиции по опциону пут Δ принимает отрицательные значения, меняясь от -1 для опциона глубоко в деньгах до 0 для опциона вне денег. Если открыта опционная позиция на большее число контрактов, то Δ пропорционально увеличивается.

Таким образом, изменения стоимости сложного составного портфеля при колебаниях цены базисного актива приблизительно такие же, как если бы просто занимать позицию Δ по базисному активу. Если цена базисного актива переместится из F_0 в точку F_1, то стоимость портфеля приблизительно будет равна

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \Delta_0(F_1 - F_0).$$

Коэффициент Δ является одним из так называемых коэффициентов чувствительности стоимости портфеля *(sensitivities)* по отношению к ценообразующим параметрам. Эти коэффициенты показывают, на сколько меняется стоимость портфеля при малом отклонении того или иного параметра от опорного значения, при котором рассчитана стоимость портфеля. Термин «коэффициенты хеджа» обобщенно применяют и ко всем этим коэффициентам, поскольку они позволяют строить портфели, инвариантные к локальным изменениям того или иного параметра или одновременно нескольких из них.

Как следует из формул главы 6, стоимость портфеля П зависит от таких переменных, как текущая фьючерсная котировка, время до экспирации опционов, волатильность, а в ряде случаев также и от процентной ставки:

$$\Pi = \Pi(F, t, \sigma, r),$$

где t - переменная, означающая текущее время. В этом выражении опущены страйки и даты экспирации опционов, поскольку они фиксированы.

Параметр дельта Δ показывает, на сколько меняется стоимость портфеля при изменении цены базисного актива на единицу (1 рубль) при фиксированных остальных параметрах. Математически Δ определяется как частная производная стоимости портфеля по цене базисного актива:

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial F}.$$

В дополнение к коэффициенту Δ вводится коэффициент гамма Γ:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial F} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial F^2},$$

который позволяет оценить, на сколько меняется Δ при изменении цены базисного актива. Для портфеля, состоящего только из фьючерсных позиций, $\Gamma = 0$. В общем случае при сдвиге цены базисного актива в точку F_1 коэффициент хеджа будет равен

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \Gamma_0(F_1 - F_0),$$

где оба коэффициента - Δ_0 и Γ_0 - рассчитаны в точке F_0. Более точно стоимость портфеля в точке F_1 дается соотношением

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \Delta_0(F_1 - F_0) + 0.5\Gamma_0(F_1 - F_0)^2. \quad (9.1)$$

Коэффициент Γ_0 характеризует кривизну графика стоимости портфеля в окрестности точки F_0.

Аналогично Δ определяются коэффициенты чувствительности стоимости портфеля по отношению к остальным ценообразующим параметрам - тета, вега, ро:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \qquad Vega = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}, \qquad \rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \quad (9.2)$$

Удобнее нормировать коэффициенты следующим образом:

$$\Theta = \frac{1}{252}\frac{\partial \Pi}{\partial t}, \qquad Vega = \frac{1}{100}\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}, \qquad \rho = \frac{1}{100}\frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

тогда тета, вега, ро измеряются соответственно в руб/день, руб/процент, руб/процент и показывают изменение теоретической стоимости портфеля

- на следующий торговый день;
- при увеличении волатильности σ на один процент;
- при увеличении процентной ставки r на один процент.

Формулы для расчета коэффициентов чувствительности приведены в приложении А. Во избежание недоразумений обратим внимание на то, что в определении коэффициента Θ используется текущее время t, тогда как все формулы даются в терминах срока действия опциона $T = T_{\text{EXP}} - t$, где T_{EXP} - фиксированная дата экспирации. Очевидно, что для получения Θ следует дифференцировать стоимость по T, но результат брать с обратным знаком.

В рассматриваемом примере коэффициенты в момент открытия позиций имели значения, указанные в таблице 9.1 ($F_0 = 5050$, $\sigma = 20\%$, коэффициент ρ здесь равняется 0). Первоначально позиция была практически Δ-нейтральной: остаточный коэффициент $\Delta = -0.2$ по модулю меньше 1 и не может быть устранен покупкой или продажей фьючерсов. Приблизительно первоначальную стоимость позиции можно оценить как произведение коэффициента вега на запас по волатильности, определяемый как разность прогнозируемой и опционной волатильностей: 1373∗(20-10)=13730.

Коэффициент	Δ	Γ	Θ	Vega
-3 фьючерса	-3.0	0.0	0	0
100 длинных 5100 колл	45.7	0.114	-223	690
100 длинных 5000 пут	-42.9	0.113	-220	683
Итого по портфелю	-0.2	0.227	-443	1373

Таблица 9.1. Коэффициенты чувствительности портфеля, $F_0 = 5050.$

При смещении фьючерсной котировки в точку $F_1 = 5000$ таблица приобретает следующий вид:

Коэффициент	Δ	Γ	Θ	Vega
-3 фьючерса	-3.0	0.0	0	0
100 длинных 5100 колл	40.0	0.112	-215	667
100 длинных 5000 пут	-48.6	0.116	-222	687
Итого по портфелю	-11.6	0.228	-437	1353

Таблица 9.2. Коэффициенты чувствительности портфеля, $F_1 = 5000.$

При этом возникает короткая рыночная позиция. Новый коэффициент $\Delta = -11.6$ мог бы быть получен на основании данных таблицы 9.1 как сумма остаточного коэффициента Δ и произведения коэффициента Γ на смещение фьючерсной котировки:

-0.2+0.227∗(-50)=-11.55.

Рассчитанное выше приращение стоимости портфеля (250) в соответствии с (9.1) можно оценить как

-0.2∗(5000-5050)+0.5∗0.227∗50∗50=288.

Если необходимо оценить стоимость портфеля при изменении всех факторов, то следует использовать формулу

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \Delta_0(F_1 - F_0) + 0.5\Gamma_0(F_1 - F_0)^2 + \Theta_0(t_1 - t_0) + Vega_0(\sigma_1 - \sigma_0) + \rho_0(r_1 - r_0),$$

где

- $F_1 - F_0$ - сдвиг цены базисного актива,
- $t_1 - t_0$ - интервал времени в днях,
- $\sigma_1 - \sigma_0$ - сдвиг волатильности в процентах,
- $r_1 - r_0$ - изменение процентной ставки в процентах.

9.2. ПРИМЕР ДИНАМИЧЕСКОГО ХЕДЖА I

Коэффициент Δ имеет прямое отношение к динамическому хеджу. Продолжим пример 3.1 раздела 3.4. Последняя точка графика исторической волатильности на рис. 3.3 дает истинную волатильность фьючерсной котировки за предшествующий 60-дневный период, равную приблизительно 40%. Предположим, что в течение всего этого периода рынок котирует опционы исходя из 40%-ной волатильности. Так, 27 марта при котировке $F_0 = 5000$ июньские опционы колл со страйком 5000 стоят 360 рублей. Предположим, что трейдер покупает 100 опционов и в дальнейшем применяет динамический хедж. Считается, что на остатки на счете процент не начисляется.

Первый шаг состоит в расчете коэффициента дельта купленных опционов: $\Delta_0 = 53.6$, и продаже 54 фьючерсных контрактов по текущей цене $F_0 = 5000$ для получения Δ-нейтральной позиции. После коррекции портфель имеет остаточный коэффициент $\tilde{\Delta}_0 = -0.4$. Изменение графика портфеля в результате продажи фьючерсов иллюстрируется рис. 9.2, где пунктирная линия показывает позицию по опциону колл до фьючерсной коррекции.

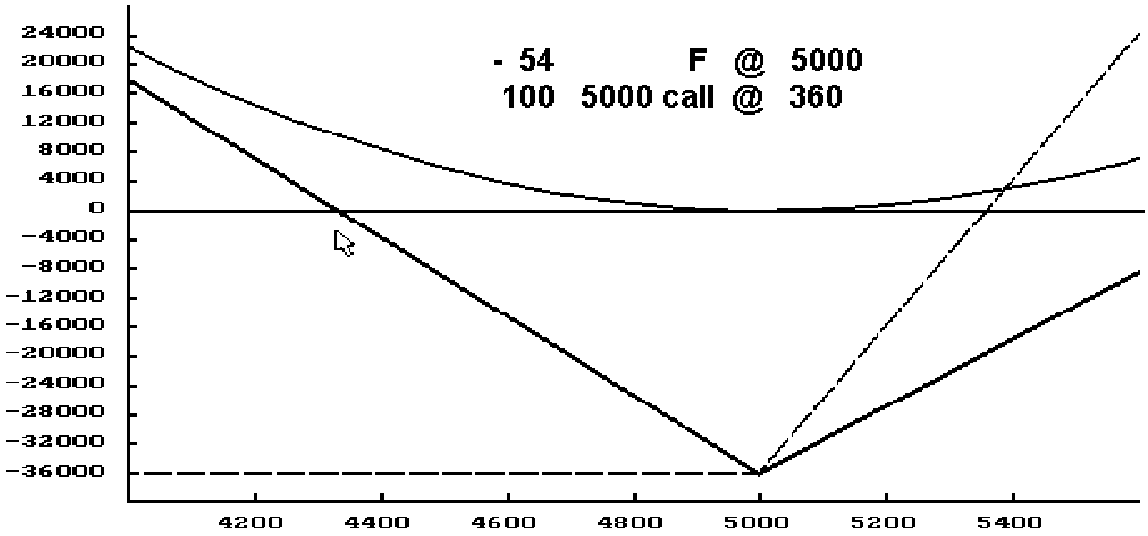


Рис. 9.2. Суммарный график открытой позиции

Куда бы ни двинулась фьючерсная цена после открытия Δ-нейтральной позиции, стоимость портфеля (в соответствии с гладкой параболообразной кривой) будет увеличиваться. Однако с течением времени происходит уменьшение временнóй стоимости опциона, что иллюстрируется рис. 9.3.

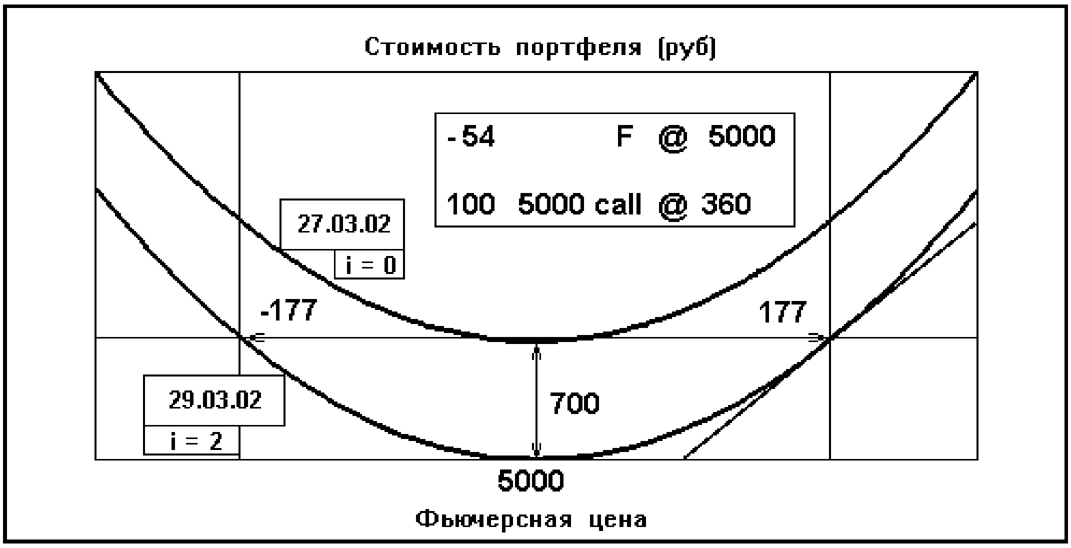


Рис. 9.3. Двухдневное изменение стоимости портфеля

Коэффициенты чувствительности позиции 27.03.02 равны

$$\Theta_0 \cong -349 \ \textit{руб.}, \qquad \Gamma_0 \cong 0.044$$

Предположим, что фьючерсные коррекции проводятся через день. К 29.03.02 из-за временного убывания стоимости опциона график смещается вниз на 700 руб. Как следует из рис. 9.3, для точной компенсации временного убывания дневное колебание фьючерсной котировки должно быть равно 177 рублям, независимо от направления. Эту величину можно оценить из соотношения

$$-2\Theta_0 = 0.5\Gamma_0 (F_2 - F_0)^2, \tag{9.3}$$

откуда

$$|F_2 - F_0| = \sqrt{2 * 349 \ /(0.5 * 0.044)} \cong 177 .$$

Формула Блэка-Шоулса «устроена» таким образом, что среднеквадратическое двухдневное изменение котировки, определяемое по формуле (3.6) при $t = 2/252$, $\overline{F(t)} \cong F_0 = 5000$, $\sigma = 40\%$, совпадает с этой величиной:

$$\sigma_{F(t)} = 5000 \ * 0.4 * \sqrt{252 \ / \ 2} \cong 177 \ .$$

Реально фьючерсная цена 29.03.02 была равна 5172, то есть приращение цены фьючерса было приблизительно таким, чтобы скомпенсировать временное убывание стоимости опциона. Более точно, изменение стоимости портфеля составило –110 рублей, при этом коэффициент дельта портфеля возрос с –0.4 до 7. Эти величины можно приближенно оценить с помощью коэффициентов чувствительности:

$$\Delta_1 \cong \tilde{\Delta}_0 + \Gamma_0 (F_2 - F_0) = -0.4 + 0.044 \ *172 \ = 7.17$$

$$\Pi_2 - \Pi_0 = 2\Theta_0 + \tilde{\Delta}_0 (F_2 - F_0) + 0.5\Gamma_0 (F_2 - F_0)^2 = -2*349 - 0.4*172 + 0.5*0.044*172^2 \cong -117 \ .$$

Для устранения возникшего наклона позиции (ненулевого коэффициента дельта) короткая фьючерсная позиция наращивается до 54+7=61, после чего общая позиция становится горизонтальной в окрестности новой фьючерсной цены 5172. Если этого не делать, то сохраняется вероятность возврата котировки в исходную точку с потерей приращения стоимости позиции, вызванного движением фьючерсной цены.

В дальнейшем коррекция числа открытых фьючерсных позиций (динамический хедж) проводится по той же схеме. В таблице 9.3 приведены результаты динамического хеджа вплоть до даты исполнения фьючерсов и опционов. Столбцы таблицы имеют следующий смысл:

- даты, в которые проводятся коррекции (через один рабочий день, для сокращения размеров таблицы);
- номер рабочего дня с начала операции;
- расчетные цены июньского фьючерсного контракта, причем в последней строке указана цена исполнения июньского фьючерса (цена спот-рынка);
- теоретические стоимости опциона колл на страйке 5000 при 40%-ной волатильности; эти же величины в данном примере принимаются в качестве реальных расчетных цен опциона;
- суммарная вариационная маржа, накопленная к данному моменту (или изменение стоимости портфеля по отношению к начальной);
- коэффициент дельта портфеля до проведения очередной фьючерсной коррекции;
- текущее количество открытых фьючерсных позиций после проведения коррекции;
- в последних трех колонках - остальные коэффициенты чувствительности портфеля.

Для лучшей читаемости таблицы все колонки, начиная с четвертой, приведены к стоимости одного опциона (значения поделены на 100), кроме колонок Δ и I^{Φ}, относящихся к 100 опционам.

Если двухдневное изменение фьючерсной цены меньше 177, то стоимость портфеля уменьшается (ср. Π_0->Π_2, Π_4->Π_6->Π_8), если больше – то увеличивается (Π_2->Π_4, Π_8->Π_{10}, и особенно Π_{40}-> Π_{42}). Если бы коррекции проводились ежедневно, то таким пороговым значением было бы $177/\sqrt{2} = 125$ рублей. Данные значения – 177 и 125 – относятся к уровню фьючерсной цены порядка 5000 рублей, по мере движения фьючерса они пропорционально меняются.

Чем меньше случайные колебания стоимости портфеля, тем совершеннее хедж. Сам факт случайных колебаний стоимости портфеля объясняется тем, что реальный хедж осуществляется дискретно как по времени, так и по Δ, к тому же волатильность цены базисного актива не является постоянной. Чем меньше дискретность, тем стабильнее стоимость портфеля, и в пределе непрерывной коррекции она является постоянной - нулевой. Дискретность проявляется тем сильнее, чем ближе дата экспирации опционов, поскольку для опционов вблизи денег коэффициенты Γ и Θ возрастают по мере приближения даты экспирации. Особенно наглядно это проявляется 29.05.02, когда в результате резкого падения цены вариационная маржа оказывается в районе 40 рублей на один опцион. С другой стороны, если бы колебания цены были бы меньше прогнозируемых, то портфель столь же быстро терял бы стоимость.

При хедже короткой опционной позиции на деньгах, напротив, значительные колебания фьючерсной цены имели бы отрицательный эффект, а неподвижность цены приводила бы к росту стоимости портфеля.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Дата	i	**F**	**C**	$\Pi_i - \Pi_0$	Δ	I^{Φ}	**Г**	Θ	**Vega**
27.03.02	0	5000	360	**0.0**	53.6	-54	0.00044	-3.49	8
29.03.02	2	5172	451	**-1.1**	7.0	-61	0.00042	-3.56	8
02.04.02	4	4985	338	**-0.6**	-8.2	-53	0.00046	-3.63	8
04.04.02	6	4882	279	**-4.9**	-5.2	-48	0.00048	-3.63	8
08.04.02	8	4840	252	**-11.4**	-2.5	-46	0.00049	-3.66	8
10.04.02	10	5185	431	**8.3**	16.0	-62	0.00045	-3.85	8
12.04.02	12	5041	339	**5.5**	-6.8	-55	0.00049	-3.99	8
16.04.02	14	5250	457	**8.8**	10.3	-65	0.00045	-3.97	8
18.04.02	16	5350	517	**3.7**	5.0	-70	0.00043	-3.91	7
22.04.02	18	5052	321	**16.1**	-14.3	-56	0.00053	-4.31	8
24.04.02	20	5115	348	**8.6**	3.1	-59	0.00053	-4.43	8
26.04.02	22	5015	283	**2.4**	-5.4	-54	0.00057	-4.58	8
29.04.02	24	4955	243	**-5.3**	-4.0	-50	0.00060	-4.70	8
06.05.02	26	4730	138	**1.8**	-14.3	-36	0.00061	-4.35	7
08.05.02	28	4683	113	**-5.6**	-3.9	-32	0.00062	-4.29	7
14.05.02	30	4810	150	**-9.8**	7.5	-40	0.00067	-4.94	7
16.05.02	32	4936	195	**-15.5**	7.7	-48	0.00071	-5.49	8
18.05.02	34	5235	358	**4.1**	20.4	-68	0.00063	-5.47	7
21.05.02	36	5001	204	**10.0**	-15.9	-52	0.00078	-6.18	8
23.05.02	38	4780	98	**18.0**	-18.3	-34	0.00080	-5.77	7
27.05.02	40	4810	96	**6.4**	0.9	-35	0.00086	-6.32	7
29.05.02	42	4498	18	**37.7**	-24.3	-11	0.00050	-3.19	3
31.05.02	44	4289	2	**44.9**	-8.9	-2	0.00016	-0.94	1
04.06.02	46	4200	0	**44.6**	-1.6	0	0.00005	-0.26	0
06.06.02	48	4264	0	**44.4**	0.2	0	0.00003	-0.17	0
10.06.02	50	4257	0	**44.2**	0.0	0	0.00000	-0.01	0
13.06.02	52	4285	0	**44.2**	0.0	0	0.00000	0.00	0
14.06.02	53	4135	0	**44.2**	0.0	0	0.00000	-3.49	0

Таблица 9.3. Пример динамического хеджа I

Выше предполагалось, что непрерывно начисляемый процент r равен нулю. Однако поскольку движения денег на счете в данном случае не происходит (реально - практически не происходит), то процент r мог бы быть любым. Именно этим можно объяснить независимость стоимости опционов на фьючерс без уплаты премии от процентных ставок (см. раздел 4.3).

Естественно, в том виде, как это представлено в таблице 9.3, процедуру динамического хеджа проводить нет смысла, поскольку при начальной цене опционов, равной теоретической стоимости, прибыль не ожидается (то, что в таблице 9.3 в конце образуется прибыль в размере 44.2 рубля на один опцион, является случайной флуктуацией). Смысл появляется, если реальная цена опционов на момент начала операции меньше теоретической стоимости: если при покупке опционов по цене 360 можно остаться «при своих», то при покупке, например, за 300 должна остаться прибыль в размере 60 рублей на каждый опцион. Эта прибыль появляется не в один момент, а постепенно по мере уменьшения разности между ценой опционов и теоретической стоимостью, что неизбежно происходит с течением времени. Важно, что при этом расчет необходимого для коррекций числа фьючерсных позиций осуществляется исходя не из реальной цены опциона и опционной волатильности, а исходя из прогноза волатильности. Если вернуться к рис. 9.1, то ориентиром при проведении такого рода операций является «воображаемая» кривая *ZZ*.

Практически желательно не доводить динамический хедж до даты экспирации опционов ввиду отмеченного выше влияния дискретности, а фиксировать прибыль раньше. Так, в рассматриваемом примере к 31.05.02 падение фьючерсной цены приводит к тому, что опционы оказываются глубоко вне денег. Можно закрыть фьючерсные позиции и продать опционы или просто «забыть» о них, так как максимально возможные с этого момента потери в любом случае не превысят остаточной цены опционов (при этом сохранится вероятность обратного движения фьючерсных котировок и роста цены опционов).

Как обычно, при попытке получения спекулятивной прибыли проблема состоит в том, чтобы превзойти в точности среднерыночную оценку будущего развития событий. Если для чисто фьючерсного спекулянта объектом прогноза является направление тренда фьючерсной цены, то для трейдера, применяющего динамический хедж, необходимо прогнозировать волатильность фьючерса.

Важным вопросом при проведении динамического хеджа является выбор частоты коррекций и конкретных моментов их проведения. Одним из вариантов является коррекция через определенные одинаковые временные интервалы, например, раз в день или раз в неделю. Как отмечается в [15], этот вариант наиболее часто используется профессиональными трейдерами. Второй вариант предполагает проведение коррекций, когда Δ достигает определенного порогового значения. Как в первом, так и во втором вариантах желательно оптимально выбрать временной интервал или пороговое значение. Чем больше эти параметры, тем сильнее случайные колебания стоимости портфеля, но чем чаще проводятся коррекции, тем больше комиссионные расходы. Для нахождения компромисса применяется многократное моделирование процесса динамического хеджа при конкретных значениях комиссионных, предполагаемых объемах позиции и всех остальных необходимых параметрах с целью получения статистических данных, на основании которых определяется оптимальная процедура.

Одно простое соображение касается позиций с положительным коэффициентом Γ, типичных, в частности, для важной категории участников рынка - хеджеров (гл. 12). Предположим, что расходы по покупке или продаже n контрактов равны $a+b|n|$, где a,b - заданные константы. Если при значении фьючерсной котировки F_i позиция была Δ-нейтральной, то при смещении котировки в точку F_{i+1} для сохранения Δ-нейтральности необходимо купить или продать $\Gamma_i|F_{i+1}-F_i|$ фьючерсных контрактов (точнее - это число, округленное до ближайшего целого). В противном случае остается риск возврата котировки в исходную точку, при котором предшествующие накопления в размере $0.5\Gamma_i(F_{i+1}-F_i)^2$ будут утрачены. Если расходы по коррекции позиции превышают эту величину, то проводить коррекцию заведомо не имеет смысла. Таким образом, необходимым условием для коррекции является

$$a+b\Gamma_i\left|F_{i+1}-F_i\right| < 0.5\Gamma_i(F_{i+1}-F_i)^2.$$

При $a=0$ соотношение упрощается до $2b<\left|F_{i+1}-F_i\right|$. Скажем, если комиссия по контракту на нефть объемом 1000 баррелей составляет 25 долларов, то вопрос о целесообразности коррекции стоит рассматривать только при смещении котировки более чем на 5 центов за баррель. Необходимо также принимать во внимание следующее уточнение: обычно комиссия берется только при открытии новых позиций, при закрытии уже имевшихся позиций комиссия не начисляется.

Третий вариант коррекции включает в себя элемент спекуляции на правильном прогнозе фьючерсной котировки. Если после установления Δ-нейтральной позиции с положительным коэффициентом Γ (то есть типа той, что рассмотрена в примере динамического хеджа I) котировка смещается и есть основания предполагать, что следующее смещение произойдет в том же направлении, то коррекцию лучше не проводить. В соответствии со степенью уверенности в этом прогнозе можно нарастить или, наоборот, несколько уменьшить коэффициент Δ, сохраняя знак позиции. Для исходных позиций с отрицательным коэффициентом Γ, например, при проданных переоцененных опционах, коррекцию проводить не обязательно, если ожидается обратный отскок фьючерсной котировки.

Вообще говоря, использование опционов добавляет как бы еще одну степень свободы по сравнению с торговлей только фьючерсными контрактами: возникает возможность получать прибыль на правильном прогнозе волатильности, при этом остаются все возможности, связанные с правильным прогнозом тренда цены базисного актива. В ситуациях, когда тренда не наблюдается, а цена лишь колеблется в определенном диапазоне (в техническом анализе это обозначается терминами торговый диапазон или область застоя - *trading range* или *congestion area*) получение спекулятивной прибыли на фьючерсах достигается скальпированием - частыми, возможно, по нескольку раз за торговую сессию, сменами короткой и длинной позиции в соответствии с направлением движения цены фьючерса. Как правило, такие изменения трудно прогнозируемы, требуют непрерывного слежения за динамикой торгов, поэтому многие трейдеры строят свои стратегии, исходя из более долговременных прогнозов. Опционы позволяют получать спекулятивную прибыль и в подобных ситуациях на удачном прогнозе волатильности и чисто механической ребалансировке позиции. Если при этом удается «цепляться» за края графика фьючерсной цены, то есть проводить коррекции фьючерсной позиции в моменты разворота краткосрочных трендов, то это эквивалентно увеличению волатильности цены базисного актива (по сравнению с взятием равномерных по времени отсчетов) и дополнительно увеличивает прибыль.

В приведенном примере при начальной фьючерсной котировке 5000 опцион колл имел такую же страйковую цену. В стратегиях, основанных на волатильности, обычно выбираются опционы на деньгах или слегка вне денег, поскольку коэффициент вега для них максимален.

Δ-нейтральная позиция может быть получена не только добавлением к опционам длинных или коротких фьючерсных позиций в соответствующем количестве, но и покупкой или продажей других опционов. Так, в таблице 9.1 из опционов 5100 колл и 5000 пут Δ-нейтральная позиция образуется без использования фьючерсов, если взять опционы в пропорции 1 к

45.7/42.9=1.065, то есть на 100 опционов колл купить 107 опционов пут. По мере движения фьючерсной котировки достаточно менять в портфеле соотношение между количествами этих опционов, либо добавлять другие опционы для сохранения Δ-нейтральности. Например, при падении фьючерсной цены отрицательный коэффициент Δ может быть устранен наращиванием позиции по опциону колл либо частичным сбросом позиции по опциону пут. Если оба опциона недооценены, то первый вариант коррекции предпочтительнее, поскольку увеличивает ожидаемую прибыль. Однако при этом необходимо иметь в виду, что вместе с увеличением потенциальной прибыли возрастает и риск, связанный с ошибкой прогноза волатильности.

Естественно, в процессе реализации той или иной стратегии прогноз волатильности на оставшийся срок действия опционов может меняться, и в этом случае при проведении расчетов каждый раз используется новая оценка.

9.3. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ОПЦИОНОВ

Приблизительно нулевая вариационная маржа по портфелю в таблице 9.3 означает, что вариационная маржа по фьючерсным позициям достаточно точно воспроизводит уменьшение или увеличение стоимости 100 проданных опционов. Из этого следует, что покупку или продажу опционов можно имитировать, постоянно поддерживая открытую фьючерсную позицию равной Δ опционов. Эта процедура называется воспроизведением опционов *(option replication technique).* Динамический хедж в рассмотренном выше примере по существу представляет собой единовременную покупку «настоящих» опционов и имитацию продажи тех же опционов с помощью фьючерсов.

Метод воспроизведения опционов с помощью фьючерсов может использоваться не только для получения спекулятивной прибыли путем имитации опционной позиции, противоположной позиции по «настоящим» опционам, но и просто как замена покупки или продажи опционов. Поменяем во всей колонке I^{Φ} таблицы 9.3 знаки, тогда фьючерсная позиция будет воспроизводить 100 купленных опционов колл на страйке 5000. По мере того как фьючерсная цена растет и опцион оказывается все глубже в деньгах, открытая фьючерсная позиция увеличивается, при падении фьючерсной цены позиция сбрасывается. Этим достигается получение прибыли при росте цены и ограничение потерь при падении. Заметим, что при кратковременном движении цены вверх и последующем возврате сначала происходит наращивание позиции, а затем продажа докупленных перед этим фьючерсов. Таким образом, следуя формальной процедуре поддержания требуемой фьючерсной позиции, приходится при случайных флуктуациях цены «покупать дорого, продавать дешево». Возникающие при этом потери в сумме и составляют премию по опциону. Чем сильнее флуктуации, тем больше потери в полном соответствии с возрастанием стоимости имитируемого опциона при увеличении волатильности.

В рассматриваемом примере начальная стоимость опциона была равна 360 рублей, к концу операции опцион оказался вне денег и премия была потеряна в результате ежедневных перечислений вариационной маржи. Эта величина была практически скомпенсирована положительной вариационной маржей по фьючерсам. В общем случае, при имитации купленного опциона суммарная вариационная маржа по фьючерсам равна стоимости имитируемого опциона на конец операции за вычетом его начальной теоретической стоимости. Если бы спот-курс 14 июня оказался выше 5000, скажем, 5400, то стоимость имитируемого опциона была бы равна 400 и суммарные потери по фьючерсам оказались бы равны 400-360=40 рублям.

Для учета процентной ставки r в предыдущие рассуждения необходимо внести поправку. Дело в том, что при имитации опциона посредством фьючерсов компенсации денежных потоков по опционным и фьючерсным позициям, как это наблюдалось в процедуре динамического хеджа, не происходит. На накопления или потери по маржевым выплатам ежедневно начисляется процент. Эта ситуация близка к рассмотренной в разделе 5.2, где речь шла об опционе с уплатой премии, только в данном случае рассматривается как бы одна часть портфеля, связанная с маржевыми выплатами. Для того чтобы окончательный результат операции не зависел от траектории движения фьючерсной цены, а только от конечного значения, необходимо определять коэффициент Δ по формулам, относящимся к опционам с уплатой премии.

Пусть в момент $t=0$ продается опцион колл с уплатой премии по цене, равной стоимости, и одновременно покупаются Δ фьючерсных контрактов. Стоимость портфеля при этом равна: $\Pi_0 = C_0 - C_0 = 0$, где первое положительное слагаемое справа является полученной за опцион премией, а второе отрицательное - стоимостью короткой позиции по опциону. На следующий день на рублевую составляющую портфеля начисляются проценты, кроме того, появляется вариационная маржа V_1 по фьючерсам. Как было показано в разделе 5.2, в условиях биномиальной модели стоимость портфеля при этом не меняется:

$$\Pi_1 = (C_0 e^{r\tau} + V_1) - C_1 = 0,$$

где τ - однодневный интервал. Аналогично на второй день $\Pi_2 = (C_0e^{2r\tau} + V_1e^{r\tau} + V_2) - C_2 = 0,$ и так далее. В итоге на момент экспирации $t = T = m\tau$ суммарные выплаты по вариационной марже с учетом процентов составят

$$V_1e^{r(m-1)\tau} + V_2e^{r(m-2)\tau} + \ldots + V_m = C_T - C_0e^{rT}.$$

Метод воспроизведения опционов при имитации длинных позиций хорошо работает до тех пор, пока цена фьючерсов меняется без резких скачков. Если, например, при имитации опционов колл цена фьючерсов резко падает, то убытки по соответствующей длинной фьючерсной позиции оказываются пропорциональны падению котировки и могут превысить премию по «настоящим» опционам. При скачке вверх фьючерсные позиции принесут меньшую прибыль, чем опционы. С другой стороны, если имитируются проданные опционы, то при резких скачках фьючерсные позиции оказываются, напротив, выгоднее.

9.4. ДЕЛЬТА-ГАММА-НЕЙТРАЛЬНЫЕ ПОЗИЦИИ

Еще одним видом стратегий является построение не только Δ-нейтральных, но одновременно и Γ-нейтральных позиций. Рассмотрим следующий пример. Пусть при фьючерсной котировке 4500 опционы колл на страйке 4500 и пут на страйке 4600 с датой экспирации через 1 месяц имеют цены, указанные в колонке «цена» таблицы 9.4. Там же даны расчетные характеристики для прогнозируемой волатильности σ=10%.

	Цена	Стоимость	Δ	Γ	Θ	Vega
4500 колл	60.0	53.29	0.506	0.00299	-1.16	5.33
4600 пут	102.0	118.01	0.766	0.00230	-0.89	4.10

Таблица 9.4

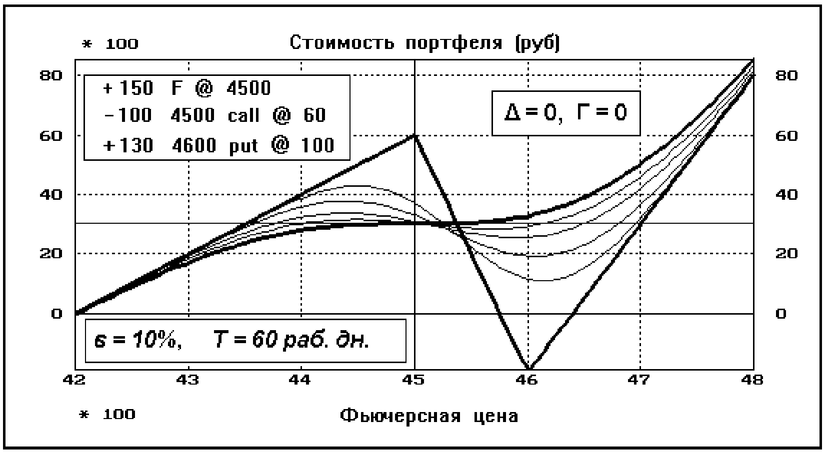
Из этих данных следует, что опцион колл переоценен, а опцион пут недооценен. Предположим, что трейдер на основании этих данных решает продать 100 опционов колл, купить 130 опционов пут и купить 150 фьючерсов. Тогда общий портфель имеет параметры, перечисленные в таблице 9.5. Коэффициенты Δ и Γ портфеля здесь приблизительно равны 0. Это достигается следующей последовательностью расчетов: приняв за исходное, что продается 100 опционов колл, подбирается количество покупаемых опционов пут, при котором Γ портфеля обнулится; затем подсчитывается получившийся коэффициент Δ и соответствующее количество фьючерсных позиций компенсирует этот коэффициент.

	Цена	Стоимость	Δ	Γ	Θ	Vega
150 фьюч	0	0	150.0	0.0	0	0
-100 колл	-6000	-5330	-50.6	-0.299	116	-533
130 пут	13260	15340	-99.6	0.299	-116	533
Итого	7260	10010	-0.2	0.0	0	0

Таблица 9.5

График получившейся позиции показан на рис. 9.4. Из графика видно, что за счет Δ-Γ-нейтральности достигается стабильность стоимости портфеля в значительном интервале фьючерсных котировок, и тем самым потребность в регулярных коррекциях уменьшается. Одновременно с Γ обнуляется и коэффициент Θ, который в свою очередь связан с вегой, поскольку время и волатильность входят в формулу для теоретической стоимости опционов на фьючерс с фьючерсным типом расчетов в комбинации $\sigma\sqrt{T}$.

Если стоимость опционов зависит от процентной ставки r, например, речь идет об опционах на акцию, то комбинация трех различных опционов, а также позиций по базисному активу позволяет построить портфель со всеми нулевыми коэффициентами чувствительности, включая чувствительность к процентной ставке ρ (ро).



êËÒ. 9.4. ∆-Γ-ÌÂÈÚð‡Î¸ Ì‡fl ÔÓÁËˆËfl

Как показывает рис. 9.4, нулевые коэффициенты чувствительности не означают стабильности стоимости портфеля и коэффициента Δ в будущем: при достаточно больших изменениях котировки, а также с течением времени стоимость портфеля все-таки отклоняется от первоначальной, появляется и нескомпенсированный наклон графика, что требует проведения коррекций.

9.5. ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ

Приведенные примеры могут создать излишне оптимистичное впечатление о полном соответствии теории и практики. В действительности теоретические модели отражают лишь основные черты реальных процессов, и даже сравнительно мелкие, но многочисленные отклонения от модели в совокупности способны привести к результатам, прямо противоположным ожидаемым. Для того чтобы продемонстрировать некоторые типичные проблемы, вернемся еще раз к таблице 9.3. Как отмечалось выше, одним из условий, при которых получена формула Блэка-Шоулса, является постоянство волатильности цены базисного актива за все время существования опциона. В реальности это не так, в том числе в рассматриваемом примере. Одним из следствий этого является то, что процедура динамического хеджа, примененная аналогичным образом к 100 опционам колл, но на других страйках, приводит к значительным отклонениям стоимости портфеля от начальной. В таблице 9.6 даны конечные стоимости портфеля Π_{53} для некоторых страйков, а также коэффициенты Vega этих опционов на начало операции.

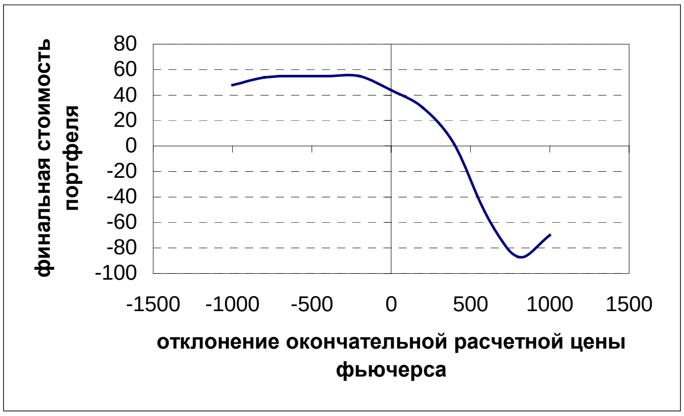
Страйк	4000	4500	5000	5500	6000
Π_{53}	-31	-4	44	27	15
Vega	3	6	8	7	5

Таблица 9.6

Для того чтобы в данном случае иметь шансы получить прибыль по окончании динамического хеджа, необходимо в начале операции иметь запас по волатильности в размере как минимум $|\Pi_{53}|$/Vega. Например, апостериори ясно, что продавать опционы на страйке 4000 в расчете на их переоцененность имело бы смысл только в том случае, если опционная волатильность опционов как минимум была бы равна 40+31/3≅50%, то есть значительно превышала бы прогнозируемую волатильность.

Можно дать следующее объяснение качественного характера приведенным в этой таблице данным. В условиях непостоянства волатильности цены базисного актива существенно, насколько далеко от страйка находится цена в периоды повышенной и пониженной волатильности. Если цена находится в районе страйка, то повышенная волатильность приводит к более быстрому росту стоимости портфеля по сравнению со случаем, когда цена удалена от страйка. И наоборот, если периоды, когда опцион оказывается на деньгах, совпадают с интервалами пониженной волатильности цены базисного актива, потери стоимости портфеля максимальны. Формально это связано с тем, что для опциона на деньгах коэффициенты Θ и Γ наибольшие.

Еще одним выводом из теоретической модели движения цены базисного актива является независимость стоимости опциона от скорости тренда базисного актива μ. Однако если модифицировать реальную фьючерсную котировку из таблицы 9.3 таким образом, чтобы встроить в нее тренд с некоторым постоянным коэффициентом μ, и моделировать на полученном процессе динамический хедж, то получаются результаты, приведенные на рис. 9.5. По горизонтальной оси отложено отклонение последнего значения модифицированной фьючерсной котировки $\tilde{F}_{53}$ от исходного F_{53} (точнее, от спот-курса, поскольку $\tilde{F}_{53}$, F_{53} означают спот-курс), по вертикальной – последнее значение стоимости портфеля в пересчете на один опцион.



êËÒ. 9.5. ÇÎËflÌËÂ ÚðÂÌ‰‡ Ù¸˛˜ÂðÒ‡ Ì‡ ðÂÁÛÎ¸Ú‡Ú ıÂ‰Ê‡

Таким образом, наблюдается зависимость от тренда, которая имеет под собой ту же основу – дискретность хеджа и неравномерность волатильности фьючерсной котировки во времени.

Возвращаясь к началу данного раздела, отметим, что приведенные примеры не следует воспринимать как свидетельство полной несостоятельности теории стоимости опционов. Необходимо лишь представлять те рамки, в которых эти формулы получены, и, возможно, вносить такие поправки в расчеты, которые учитывали бы отклонения реальных условий от модельных. В следующей главе рассмотрена одна из возможных поправок.

ГЛАВА 10. ОПЦИОННАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если прямое назначение методов оценки опционов заключается в расчете теоретической стоимости опциона по исходным данным – цене и волатильности базисного актива; страйку и времени до экспирации опциона; процентной ставке, - то при определении опционной волатильности решается обратная задача. Известными считаются все перечисленные исходные параметры, за исключением волатильности, вместо которой дается цена опциона. При увеличении волатильности от нуля стоимость опциона монотонно возрастает, поэтому существует единственное значение волатильности, при котором теоретическая стоимость сравнивается с заданной ценой (при условии, что цена лежит в диапазоне возможных стоимостей опциона). Найденное таким образом значение волатильности будем называть опционным[5] *(implied volatility)*.

По существу, опционная волатильность эквивалентна цене опциона и лишь выражает ее в других терминах. Для трейдеров, специализирующихся на опционах, типичными являются высказывания типа «Я купил (продал) 20%-ную волатильность» или просто «Я купил (продал) волатильность», что означает проведение сделки не в расчете на рост или падение фьючерсной котировки, а из соображений, основанных на расхождении опционной волатильности и прогнозируемой. Так, в разделе 9.1 приведен пример покупки опционов за 10% при 20%-ном прогнозе. Разность между этими величинами характеризует запас по волатильности и является не менее информативным показателем, чем собственно ожидаемая прибыль в денежном выражении.

Практически для расчета опционной волатильности может использоваться как описанный способ наращивания волатильности с некоторым шагом (скажем, 0.1%), так и более быстрые и точные численные методы решения уравнений.

10.2. КРИВАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

С опционной волатильностью связано понятие кривой волатильности. Для построения кривой волатильности выбирается определенная дата экспирации опционов и страйки, по которым ведется торговля опционами с этой датой экспирации, откладываются по горизонтальной оси. По вертикальной оси откладываются значения опционной волатильности. Если в некоторой серии опционов проходит сделка, то по величине премии и цене базисного актива рассчитывается опционная волатильность и для соответствующего страйка на графике делается отметка (при этом желательно применять обозначения, различающие сделки по опционам колл и пут). В идеале все анализируемые сделки должны быть проведены за очень короткий отрезок времени для того, чтобы получить «моментальный снимок» рыночной ситуации. На том же графике могут быть изображены интервалы между ценами спроса и предложения, выраженные в терминах волатильности. Как правило, точки, соответствующие сделкам по опционам колл и пут на одном страйке, оказываются близкими, а ворота между ценами спроса и предложения имеют общую часть, что объясняется пут-колл паритетом (5.6): временные составляющие премий опционов колл и пут на одном страйке для устранения арбитражных возможностей должны быть равны, следовательно, должны быть равны и опционные волатильности. Кривая волатильности получается соединением этих точек ломаной или более гладкой линией. Когда на отдельных страйках сделки отсутствуют, то применяются методы интерполяции и экстраполяции, причем во внимание принимается весь массив имеющихся данных о сделках и заявках по всем сериям опционов со всеми месяцами исполнения. Данные об имеющихся опционных волатильностях заносятся в таблицу, в которой столбцы соответствуют страйкам, а строки месяцам исполнения (так называемую матрицу волатильностей). Таким образом, учитывается и временная структура опционных волатильностей.

Если рынок действительно руководствуется теми соображениями, которые были положены в основу формул для теоретической стоимости опционов, то полученная кривая волатильностей для одного месяца исполнения должна быть горизонтальной прямой. Действительно, каждый участник торгов составляет для себя прогноз волатильности и при наличии запаса по волатильности, который представляется ему существенным, готов покупать недооцененные и продавать переоцененные опционы. Если опционы на

[5] Известны трудности с подбором эквивалента для термина *implied volatility,* встречаются варианты: подразумеваемая, предполагаемая, ожидаемая, внутренняя, индуцированная волатильность. Здесь не делается попытки перевода этого термина, а просто предлагается новый термин, подчеркивающий происхождение этой волатильности (так же как выше implied repo rate заменена на «доходность спот-фьючерс»). Еще одним соображением является аналогия с interest-rate swap yield curve (кривой доходностей, выводимой из процентных свопов) – термин прямо указывает на источник данных для построения кривой.

разных страйках имеют различную опционную волатильность, то покупатели сосредоточат спрос на наиболее дешевых в терминах опционной волатильности, а продавцы - на наиболее дорогих (для увеличения запаса по волатильности и уменьшения риска ошибки прогноза), что приведет к выравниванию цен в терминах волатильности.

Анализ реальных премий показывает, что этот вывод подтверждается лишь отчасти: как правило, опционные волатильности на соседних страйках близки, а кривая волатильности представляет собой плавную линию без резких перепадов. Однако чем сильнее страйк удаляется от цены базисного актива, тем заметнее отклонение волатильности от основного значения, в качестве которого принимается значение в центральном страйке. Это означает, что рынок принимает во внимание дополнительные факторы, которых не учитывает упрощенная модель движения цены базисного актива, положенная в основу теории.

Типичный пример кривой волатильности приведен на рис. 10.1. В таблице 10.1 показаны расчетные цены по опционам на фьючерс, базисным активом которого является западнотехасская нефть (NYMEX). Расчетная фьючерсная цена при этом была равна 2522 цента за баррель.

страйк	2150	2200	2250	2300	2350	2400	2450	2500	2550	2600	2650	2700	2800	2900	3000
Колл	373	324	276	228	183	143	107	76	52	33	22	14	6	2	1
Пут	1	2	4	6	11	21	35	54	80	111	150	192	284		

Таблица 10.1

На всех страйках, где даны цены опционов колл и пут, выполняется пут-колл паритет (5.6), поэтому опционные волатильности коллов и путов на одном страйке совпадают. На рисунке 10.1 наряду с кривой волатильности показаны графики цен опционов.

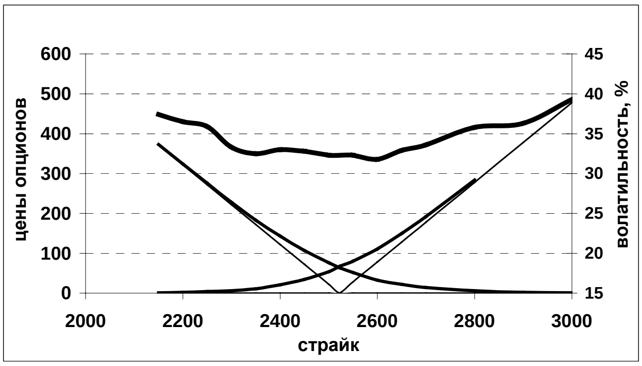


Рис. 10.1. Цены опционов и кривая волатильности

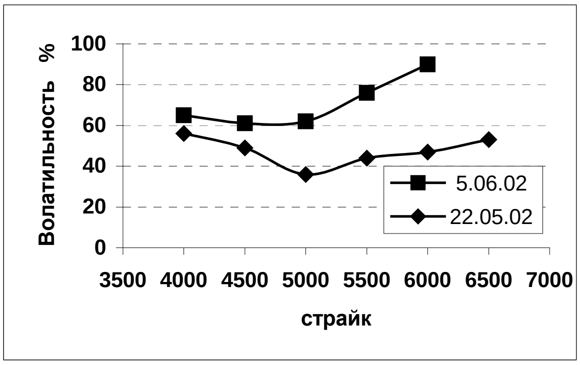


Рис. 10.2. Кривые волатильности на торгах в FORTS

Еще один пример кривых волатильности дает рис. 10.2, где данные получены обработкой сделок, заключенных в FORTS по июньским 2002 г. опционам на фьючерс на акции РАО «ЕЭС России». Цена фьючерса 22.05.02 и 5.06.02 колебалась в окрестности 5200 и 4200 соответственно.

Кривая на рис. 10.1 и нижняя кривая на рис. 10.2 характеризуются приподнятостью обеих ветвей по отношению к значению в центральном страйке. Кривая волатильности такой формы имеет название улыбки волатильности *(volatility smile)* и имеет простое объяснение. Дело в том, что гипотеза логнормальности распределения цены базисного актива в будущие моменты времени предполагает умеренные колебания цены. Вероятность резких скачкообразных изменений цены в соответствии с этой моделью очень быстро убывает с величиной скачка (известное «правило 3σ» - см. раздел 3.2). Так, исторической волатильности цены акции в 40% соответствует дневная волатильность 2.5%, при которой дневные колебания цены акции более 7-8% должны иметь вероятность порядка 0.003, или происходить не чаще одного раза в год. Реально, как известно, такие и бóльшие изменения цены случаются гораздо чаще. Продавцы опционов всегда должны иметь в виду возможность возникновения подобной ситуации, которая для них будет сопряжена со значительными и даже, может быть, катастрофическими потерями (при скачке цены вверх для продавцов опционов колл и при падении для продавцов опционов пут). Если сопоставлять риск таких потерь с премией, полученной от продажи опционов, то наиболее уязвимой оказывается позиция продавцов дешевых опционов - опционов глубоко вне денег. Для компенсации дополнительного риска стоимость этих опционов увеличивается по сравнению с теоретическим значением, которое соответствует значению опционной волатильности в центральном страйке, причем увеличение может быть в несколько раз как в терминах волатильности, так и в денежном выражении.

Фактическое распределение дневных изменений цены отличается от логнормального с тем же средним и волатильностью так, как показано на рис. 10.3: реальный процесс имеет тенденцию чаще оказываться вблизи среднего значения при спокойном развитии рыночной ситуации, но это компенсируется время от времени возникающими периодами «больших скачков» (про такое распределение говорят, что оно имеет тяжелые или жирные хвосты - *fat tails*). Отклонение от логнормальности приводит к тому, что теория занижает стоимость опционов глубоко вне денег по отношению к опционной волатильности на деньгах.

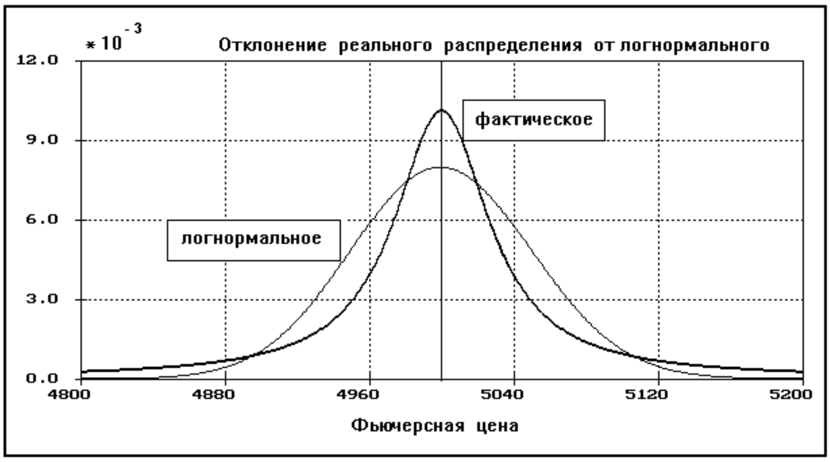
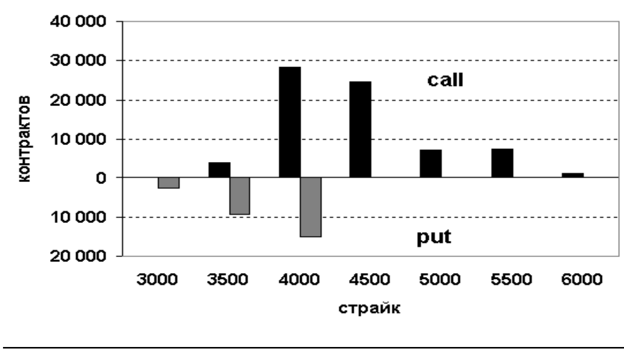


Рис. 10.3. Утяжеление «хвостов» реального распределения скачков цены

Другим типичным отклонением от логнормальности является асимметрия распределения изменений цены базисного актива *(skew)*, которая выражается в приподнятости одной ветви кривой волатильности по отношению к другой. Такая ситуация возникает тогда, когда рынок «чувствует», что в одном из направлений возможно более значительное изменение цены базисного актива, чем в другом. Например, если ожидается более резкое падение цены, то опционы пут вне денег оказываются дороже соответствующих опционов колл вне денег, чьи страйки симметрично расположены по отношению к центральному страйку, а это приводит к приподнятости левой ветви кривой волатильности по отношению к правой. Такая ситуация, и даже в более сильном варианте – монотонно убывающая с ростом страйка кривая волатильности *(volatility skew)* – характерна для опционов на фондовые индексы, исторические данные о которых демонстрируют бóльшую вероятность резкого падения, чем такого же резкого роста. Однако на рис. 10.2 верхняя кривая (для 5.06.02) демонстрирует положительный наклон, что можно интерпретировать как ожидания роста цены фьючерса после значительного падения.

çÂÓ‰ËÏ‡ÌÓ‚ÓÒÚ¸ ÓÔˆËÓÌÌ˚ı ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚÂÈ Ì‡ ð‡ÁÌ˚ı ÒÚð‡ÈÍ‡ı ÓÁÌ‡˜‡ÂÚ, ˜ÚÓ Û˜‡ÒÚÌËÍË ÚÓð„Ó‚ ÔðË ‚˚ÒÚ‡‚ÎÂÌËË ÍÓÚËðÓ‚ÓÍ fl‚ÌÓ ËÎË ÌÂfl‚ÌÓ ÓðËÂÌÚËðÛ˛ÚÒfl Ì‡ ÏÓ‰ÂÎ¸ ‰‚ËÊÂÌËfl ˆÂÌ˚, ÓÚÎË˜‡˛˘Û˛Òfl ÓÚ ÔðËÌflÚÓÈ ÔðË ‚˚‚Ó‰Â ÙÓðÏÛÎ˚ ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌ‡ (ËÎË ˜ËÒÎÂÌÌÓ„Ó ÏÂÚÓ‰‡). ä ÒÓÎÛ˜ÂÌÌ˚Ï таким образом ÓÔˆËÓÌÌ˚Ï ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚflÏ ÔÓ‰ıÓ‰ËÚ ËÁ‚ÂÒÚÌÓÂ шуточное «ÓÔðÂ‰ÂÎÂÌËÂ»: «the wrong number to put into the wrong formula to obtain the correct price» (R. Rebonato, *Volatility and Correlation*, 1999). à ÏÂ˛Úfl ÔÓ‰ıÓ‰˚ Í ÚÓÏÛ, Í‡Í ÔÓ Ì‡·Î˛‰‡ÂÏ˚Ï ˆÂÌ‡Ï ÓÔˆËÓÌÓ‚ ÔÓ‰Ó·ð‡Ú¸ ·ÓÎÂÂ ‡‰ÂÍ‚‡ÚÌÛ˛ ÏÓ‰ÂÎ¸ ‰‚ËÊÂÌËfl ˆÂÌ˚ ·‡ÁËÒÌÓ„Ó ‡ÍÚË‚‡. é‰ÌÓÈ ˝ÚË ÒÔÓÒÓ·˚ Û˜ÂÚ‡ ð‡Á‡Î¸Ì˚ı ˆÂÌ ÓÔˆËÓÌÓ‚, ‰ÓÒÚ‡ÚÓ˜ÌÓ ÒÎÓÊÌÂÂ Ë ‚˚„Î fl‰ËÚ ·ÓÎÂÂ ‡·ÒÚð‡ÍÚÌ˚Ï, ˜ÂÏ ÌÂÔÓÒðÂ‰ÒÚ‚ÂÌÌÓÂ Û˜ÂÚ ÌðË‚˚ı ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË (ËÎË ÔÓ‚Âð‡ÌÓÒÚÂÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË, ÂÒÎË Û‰ÓÁ‚ÂÎ¸ÌÓ ÚÓð„Û˛ÚÒfl ÓÔˆËÓÌ˚ Ò ð‡ÁÎË˜Ì˚ÏË ‰‡Ú‡ÏË ËÒÔÓÎÌÂÌËfl). ä‡ÍÓÈ ËÏÂÌÌÓ ËÁ «ÌÂÔð‡‚ËÎ¸Ì˚ı» ÒÔÓÒÓ·Ó‚, ð‡Ò˜ÂÚ‡ ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌÓ‚, ÔðË ˝ÚÓÏ ËÒÔÓÎ¸ÁÓ‚‡Ú¸, ÓÔðÂ‰ÂÎflÂÚÒfl ÍÓÌÍðÂÚÌÓÈ ÏÂÊ‰Û Â„Ó ÔðÂ‰ÒÚ‡‚ÎÂÌËÂÏ Ë ÒÚÂÔÂÌ¸˛ ÒÓÓÚ‚ÂÚÒÚ‚Ëfl ÏÓ‰ÂÎË ð‡ÁÌ˚Ï ˚ÌÍ‡ÏË.

Рассмотрим более детально пример торгов в FORTS фьючерсами на акции РАО «ЕЭС России» с исполнением 17 марта 2003 года и опционами на эти фьючерсы за период 15.12.02 – 14.02.03. Всего за указанный период было совершено около 5000 сделок с опционами.



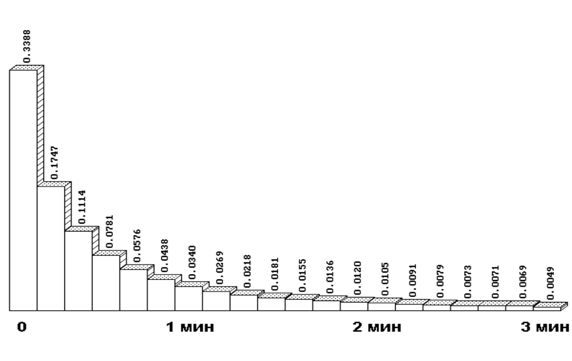


Рис. 10.4. Распределение оборотов по страйкам

Рис. 10.5. Распределение временных сдвигов

ç‡ ðËÒ. 10.4 ÔÓÍ‡Á‡ÌÓ ð‡ÒÔðÂ‰ÂÎÂÌËÂ Ó·ÓðÓÚÓ, ÔÓ ÓÚ‰ÂÎ¸Ì˚Ï ÒÂðËflÏ. ëÓÔÓÒÚ‡‚ËÏ Í‡Ê‰ÓÈ ÓÔˆËÓÌÌÓÈ Ò‰ÂÎÍÂ ˆÂÌÛ Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ Ò‰ÂÎÍË, ÌÂÔÓÒðÂ‰ÒÚ‚ÂÌÌÓ ÔðÂ‰¯ÂÒÚ‚Û˛˘ÂÈ ÂÈ ‚Ó ‚ðÂÏÂÌË. ÇðÂÏÂÌÌ˚Â Ò‰‚Ë„Ë ÏÂÊ‰Û Ú‡ÍËÏË Ò‰ÂÎÍ‡ÏË ı‡ð‡ÍÚÂðËÁÛ˛Ú ÌÂð‡‚ÌÓÏÂðÌÓÒÚ¸ ÚÓð„Ó‚ÓÈ ‡ÍÚË‚ÌÓÒÚË ‚Ó ‚ðÂÏÂÌË (ðËÒ. 10.5), Ë ˝Ú‡ ‡ÒËÏÏÂÚðËfl ÓÔðÂ‰ÂÎflÂÚ ÒÚÓÓÏÓÒÚ¸ ‚ÎËflÌËfl ÔÓðflÍ‡ Ò‰ÂÎÓÍ Ì‡ ÔÓÒ˜ËÚ‡ÌÌÛ˛ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸.

Для расчета опционных волатильностей ·°Î ËÒÔÓÎ¸ÁÓ‚‡Ì ÏÂÚÓ‰ äÓÍÒ‡-êÓÒÒ‡-êÛ·ËÌ¯ÚÂÈÌ‡ Ò ÔðÓˆÂÌÚÌÓÈ ÒÚ‡‚ÍÓÈ $r = 10\%$.

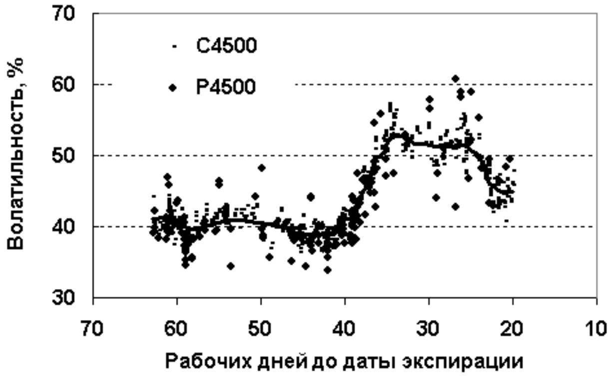


Рис. 10.6. Опционные волатильности, страйк 4500

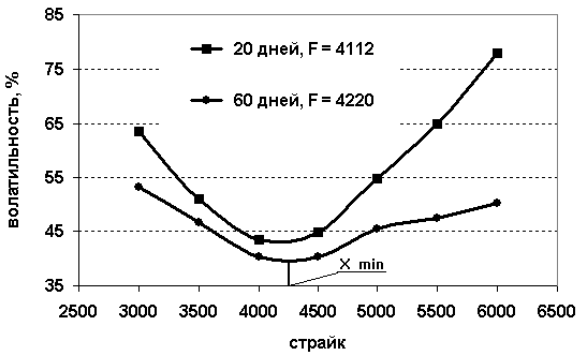


Рис. 10.7. Кривые волатильности

ç‡ ðËÒ. 10.6 ÔðÂ‰ÒÚ‡‚ÎÂÌ˚ ðÂÁÛÎ¸Ú‡Ú˚ ð‡Ò˜ÂÚ‡ ÓÔˆËÓÌÌ˚ı ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚÂÈ ‰Îfl ÓÔˆËÓÌÓ‚ ÍÓÎÎ Ë ÔÛÚ Ì‡ ÒÚð‡ÈÍ 4500. èÓ „ðËÁÓÌÚ‡Î¸ÌÓÈ ÓÒË ÓÚÎÓÊÂÌÓ ‚ðÂÏfl Í‡Í ÍÓÎË˜ÂÒÚ‚Ó ð‡·Ó˜Ëı ‰ÌÂÈ ‰Ó ‰‡Ú˚ ˝ÍÒÔËð‡ˆËË ÓÔˆËÓÌÓ‚ (ÚÓ˜ÌÂÂ, ÚÓð„Ó‚˚ı ÒÂÒÒËÈ, ÔðË˜ÂÏ ‚ı‰Â ÚÓð„Ó‚˚Â ÒÂÒÒËË ‚ðÂÏfl ‚°ð‡Ê‡ÂÚÒfl ‰ðÓ·ÌÓÏ ˜ËÒÎÓÏ). éÚ‰ÂÎ¸Ì˚Â ÚÓ˜ÍË Ì‡ „ð‡ÙËÍÂ Ó·ð‡ÁÛ˛Ú «Ó·Î‡ÍÓ», ‰Îfl ‡ÌÌÓÎËÁ‡ ÍÓÚÓðÓ„Ó ÔðËıÓ‰ËÚÒfl ÔðË·Â„‡Ú¸ Í ÒÌÓ‚‡ÏÂÌËÌ. ùÚÓÚ ð‡Á·ðÓÒ Ó·˙ÒÎÓ‚ÎÂÌ, ‚ ÚÓÏ ˜ËÒÎÂ, ÓÚÏÂ˜ÂÌÌÓÈ ‚˚¯Â ‡ÒËÏÏÂÚðËÂÈ ÔÓÚÓÍÓ‚ Ò‰ÂÎÓÍ Ë Ù¸˛˜ÂðÒÌ˚ı Ë ÓÔˆËÓÌÌ˚ı ˆÂÌ. ÒÒÎË ÛÒðÂ‰ÌËÚ¸ ÓÚ‰ÂÎ¸Ì˚Â ÚÓ˜ÍË „Î‡‰ÍÓÈ ÍðË‚ÓÈ, Í‡Í ÔÓÍ‡Á‡ÌÓ Ì‡ ðËÒÛÌÍÂ, ÚÓ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ÓÔˆËÓÌÓ‚ ÍÓÎÎ Ë ÔÛÚ ÓÍ‡Á˚‚‡˛ÚÒfl ð‡ÒÔðÂ‰ÂÎÂÌÌ˚ÏË ÔðË·ÎËÁËÚÂÎ¸ÌÓ ÒËÏÏÂÚðË˜ÌÓ ÓÚÌÓÒËÚÂÎ¸ÌÓ ˝ÚÓÈ ÍðË‚ÓÈ. ÅÛ‰ÂÏ ‰‡ÎÂÂ ËÒÔÓÎ¸ÁÓ‚‡Ú¸ ÁÌ‡˜ÂÌËfl Ì‡ ÔÓÎÛ˜ÂÌÌÓÈ ÍðË‚ÓÈ Í‡Í ‚‰ËÌÛ˛ ÓÔˆËÓÌÌÛ˛ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸ Ó·ÂËı ÒÂðËÈ Ì‡ ÒÚð‡ÈÍ 4500. Ñ‡ÍÓÈ Ó·ÂÒÔÂ˜ÂÌËfl ÒÓ„Î‡ÒÓ‚‡ÌÌÓÒÚË ‰‡ÌÌ˚ı ‰‡Î¸ÌÂÈ¯ÂÂ ÔÓÚðÂ·ÛÂÚÒfl ‡Ì‡ÎÓ„Ë˜Ì˚Ï ÒÔÓÒÓ·ÓÏ ÒÓ„Î‡ÒÓ‚‡Ú¸ Ë Ù¸˛˜ÂðÒÌ˚Â ˆÂÌ˚. èÓ ÏÂðÂ Û‚ÂÎË˜ÂÌËfl ËÌÚÂÌÒË‚ÌÓÒÚË ÓÔÂð‡ˆËÈ Ò„Î‡ÊË‚‡ÌËÂ ÓÔˆËÓÌÌ˚ı ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚÂÈ ·Û‰ÂÚ ÛðÂ·ÓÚ‡Ú¸Òfl ‚ÒÂ ‚ ÏÂÌ¸¯ÂÈ ÒÚÂÔÂÌË, Ë ÏÓÊÌÓ ·Û‰ÂÚ „ÓÚÓ‚ËÚ¸ Ó ÔÓ˜ÚË ÏÓÏÂÌÚ‡Î¸ÌÓÏ ÒÌËÏÍÂ ð˚ÌÓ˜ÌÓÈ ÒËÚÛ‡ˆËË.

ç‡ ðËÒ. 10.7 ÔÓÍ‡Á‡ÌÓ Í‡Í ‚˚„Îfl‰flÚ ÍðË‚˚Â ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ‰Îfl ‰‚Ûı ‰ÌÂÈ, ÓÚÒÚÓfl˘Ëı ÓÚ ‰‡Ú˚ ˝ÍÒÔËð‡ˆËË Ì‡ ÛÍ‡Á‡ÌÌÓÂ ˜ËÒÎÓ ðËÒÓ‚ (ðËÒ,°Â ‰‡¸Úfl Ì‡ ÒÂðÂ‰ËÌÂ ÒÓÓÚ‚ÂÚÒÚ‚Û˛˘Ëı ÚÓð„Ó‚˚ı ÒÂÒÒËÈ). ùÚË ÍðË‚˚Â ËÏÂ˛Ú ıÓðÓ¯Ó Ô˚Ú‡˛˘Û˛ ÙÓðÏÛ Û„Î‡ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË *(volatility smile)* – ÏÂÌ¸¯Â ‚ÒÂ„Ó ÓÍÓÎÓ ÒÚð‡ÈÍ‡ ÒÓÓÚ‚ÂÚÒÚ‚ÛÂÚ ÌÛÎÂ‚ÓÈ ‰ÂÎ¸ÚÂ. ç‡ ðËÒÛÌÍÂ ÓÚÏÂ˜ÂÌÓ ÏËÌËÏ‡Î¸ÌÓÂ ÁÌ‡˜ÂÌËÂ ÒÚð‡ÈÍ‡ ‰Îfl ‚˚·ð‡ÌÌÓ„Ó ÔÓ Ô‡ð‡ÏÂÚð‡Ï ÍðË‚ÓÈ. Ó‰Ì‡ÍÓ Ë ÒÓð‚Ì‡ Å˚ÎÓ ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌÓ‚ Ì‡ Ù¸˛˜ÂðÒ Ò $r = 0$ ‰‡ÂÚ ‰ÓÒÚ‡ÚÓ˜ÌÓ ·ÎËÁÍËÂ Í ÔðÂ‰˚‰Û˘ËÏ ÁÌ‡˜ÂÌËfl ðÂÁÛÎ¸Ú‡Ú˚.

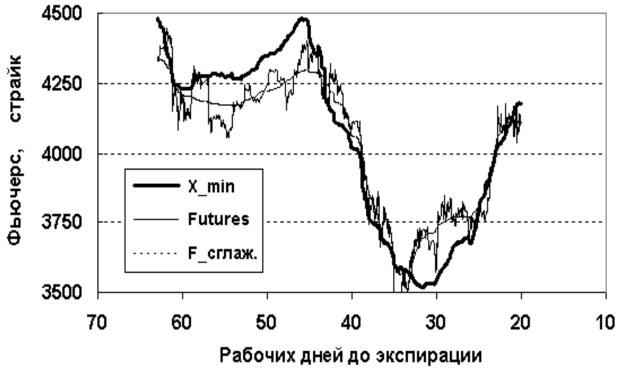


Рис. 10.8. Горизонтальные сдвиги кривой волатильности

Рис. 10.9. Вертикальные сдвиги кривой волатильности

ê‡ÒÒÏÓÚðËÏ ÚËÔË˜Ì˚Â ËÁÏÂÌÂÌËfl ÍðË‚ÓÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ÓÚÓ %Ìfl ÍÓ %Ì˛. ùÚÓÚ ‡Ì‡ÎËÁ ÏÓÊÂÚ ·˚Ú¸ ÔÓÎÂÁÂÌ Í‡Í Ò ÚÓ˜ÍË ÁðÂÌËfl ‚˚ð‡·ÓÚÍË ÚÓð„Ó‚˚ı ÒÚð‡ÚÂ„ËÈ, Ú‡Í Ë Ó˘ÂÌÍË ðËÒÍÓ‚ ÔÓÁËˆËË. ÒÒÚÂÒÚ‚ÂÌÌÓ ÔðÂ‰ÔÓÎÓÊËÚ¸, ˜ÚÓ ÔðË ‰‚ËÊÂÌËË ˆÂÌ˚ ·‡ÁËÒÌÓ„Ó ‡ÍÚË‚‡ ÍðË‚‡fl ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË, , ÔÂð‚ÓÏ ÔðË·ÎËÊÂÌËË, Ô‡ð‡ÎÎÂÎ¸ÌÓ ÒÏÂ˘‡ÂÚÒfl ‚Ôð‡‚Ó ËÎË ‚ÎÂ‚Ó ‚ÒÎÂ‰ Á‡ ˆÂÌÓÈ (äÓÌÌÓÎÎË ä., *o%*3C*= , C!%ä=›= "%ë=2 ,ëü...%"2 ,* , 2001). ç‡ ðËÒ. 10.8 ÔÓÍ‡Á‡Ì˚ „ð‡ÙËÍ ˆÂÌ˚ ·‡ÁËÒÌÓ„Ó Ù¸˛˜Âðò‡ Ë Â„Ó Ò„Î‡ÊÂÌÌ˚È ‚‡ðË‡ÌÚ. äðÓÏÂ ÚÓ„Ó, %Îfl Í‡Ê%Ó„Ó ÏÓÏÂÌÚ‡ ‚ðÂÏÂÌË %‡Ì‡ ÚÓ˜Í‡ *u_min*, , ÍÓÚÓðÓÈ ÍðË‚‡fl ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ÚËÔ‡ ËÁÓ·ð‡ÊÂÌÌ˚ı Ì‡ ðËÒ. 10.7 %ÓÒÚË„‡ÂÚ ÏËÌËÏÛÏ‡. çÂÔÓÒðÂ%ÒÚ‚ÂÌÌÓ ‚Ë%ÌÓ, ˜ÚÓ , ˆÂÎÓÏ *u_min* ÒÎÂ%ÛÂÚ Á‡ Ò„Î‡ÊÂÌÌÓÈ ˆÂÌÓÈ ·‡ÁËÒÌÓ„Ó Ù¸˛˜Âðò‡ *F_"ãë=›*.

ç‡ðfl%Û Ò „ÓðËÁÓÌÚ‡Î¸Ì˚ÏË Ò‰‚Ë„‡ÏË ÏÂÌflÂÚÒfl Ë Ó·˘ËÈ ÛðÓ‚ÂÌ¸ ÍðË‚ÓÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË, ÍÓÚÓð˚È ÏÓÊÌÓ ı‡ð‡ÍÚÂðËÁÓ‚‡Ú¸ ‚˚ÒÓÚÓÈ ÂÂ ÌËÊÌÂÈ ÚÓ˜ÍË *Y_min* (ðËÒ. 10.9). ùÚÓÚ ÛðÓ‚ÂÌ¸ ÔðË·ÎËÁËÚÂÎ¸ÌÓ ÏÓÊÌÓ ÓÚÒÎÂÊË‚‡Ú¸ , ÚÂÏÔÂ ðÂ‡Î¸ÌÓ„Ó ‚ðÂÏÂÌË Ò ÔÓÏÓ˘¸˛ ËÌ%ËÍ‡ÚÓð‡ ÓÔˆËÓÌÌÓÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË *VES,* ÔÓ ÒÏ˚ÒÎÛ fl‚Îfl˛˘Â„ÓÒfl ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸˛ ÓÔˆËÓÌÓ‚ ‚·ÎËÁË %ÂÌÂ„. Ç ı Ó%Â ÚÓð„Ó‚ ÓˆÂð%Ì‡fl Ò%ÂÎÍ‡ ÔÓ ÓÔˆËÓÌÛ ‚ı Ó%ËÚ ‚ ð‡Ò˜ÂÚ ËÌ%ËÍ‡ÚÓð‡, ÂÒÎË ‚˚ÔÓÎÌÂÌ˚ ÛÒÎÓ‚Ëfl:

- ÍÓÎÎ: $E_i - F_i \le 1000$ ËÎË $F_i - E_i \le 500$,
- ÔÛÚ: $E_i - F_i \le 500$ ËÎË $F_i - E_i \le 1000$,

„%Â E_i - ÒÚð‡ÈÍ, F_i - Ù¸˛˜Âð‡Ì‡fl ˆÂÌ‡ , ÏÓÏÂÌÚ Ò%ÂÎÍË. Ñ Îfl Ú‡ÍÓÈ Ò%ÂÎÍË ð‡ÒÒ˜ËÚ˚‚‡ÂÚÒfl ÓÔˆËÓÌÌ‡fl ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸ σ_i Ë Á‡ÚÂÏ ÓÔ·ÓÎÂÌËÂ ÁÌ‡˜ÂÌËÂ ËÌ%ËÍ‡ÚÓð‡: $VES_i = v_i / w_i$, „%Â

$$v_i = \alpha v_{i-1} + (1-\alpha)\sigma_i e^{-\left(\frac{F_i - E_i}{500}\right)^2}, \qquad w_i = \alpha w_{i-1} + (1-\alpha) e^{-\left(\frac{F_i - E_i}{500}\right)^2}, \qquad „\%Â \quad \alpha = 0.98,\ v_0, w_0 = 0.$$

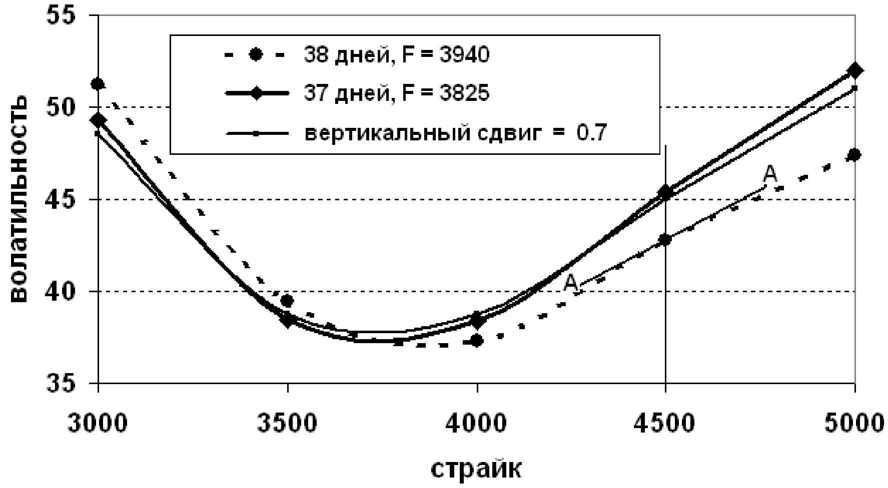


Рис. 10.10. Параллельные сдвиги кривой волатильности

Наиболее значительные дневные изменения кривой волатильности происходят на отрезке нисходящего тренда фьючерсной цены приблизительно между 45 и 30 днями до даты экспирации. На рис. 10.10 для примера показаны три кривые:

- кривая волатильности для 38 дней до даты экспирации (пунктир);
- кривая волатильности для 37 дней до даты экспирации;
- результат горизонтального и вертикального сдвигов первой из указанных кривых:
  - o горизонтального - на величину изменения цены базового актива (влево на 115);
  - o вертикального - на такую величину, чтобы достичь наилучшего совпадения с кривой 37-го дня во всех страйках (вверх на 0.7).

Благодаря двум указанным перемещениям результирующая кривая располагается значительно ближе к кривой волатильности 37 дня, чем исходная кривая 38 дня. Оптимальный вертикальный сдвиг обычно близок к изменениям *Y_min*.

Поскольку горизонтальные сдвиги кривой волатильности «привязаны» к движениям фьючерсной цены, возникает возможность уточнить прогноз стоимости опциона. Рассмотрим опцион С4500 за 38 дней до экспирации, когда фьючерсная цена равна 3940 (рис. 10.11). Опционная волатильность этой серии равна 42.6%. Если рассчитать стоимость опциона при этой постоянной волатильности, то получается тонкая кривая, обозначенная «sigma_0 = 42.6». График «sigma = sigma(F)» построен с учетом того, что при движении фьючерсной цены кривая волатильности будет параллельно сдвигаться вправо-влево и из-за этого опционная волатильность на страйке 4500 будет изменяться приблизительно вдоль касательной `` на рис. 10.10. При снижении фьючерсной цены кривая волатильности будет смещаться влево, опционная волатильность на страйке 4500 будет возрастать, поэтому стоимость опциона будет больше, чем для постоянной волатильности 42.6%. При движении цены фьючерса вверх эффект будет обратным.

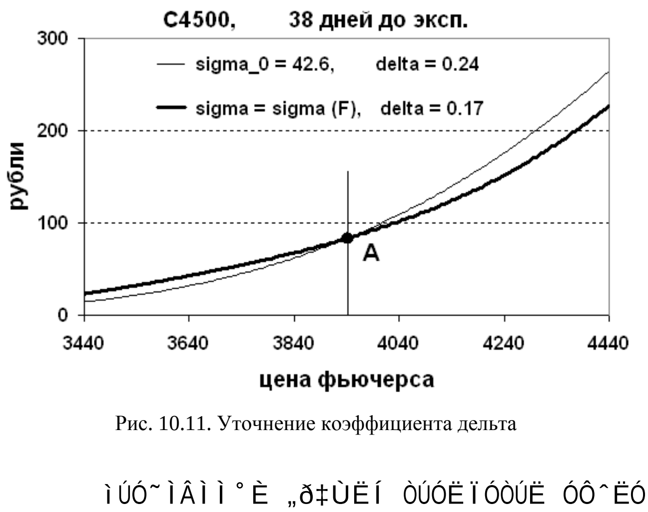


Рис. 10.11. Уточнение коэффициента дельта

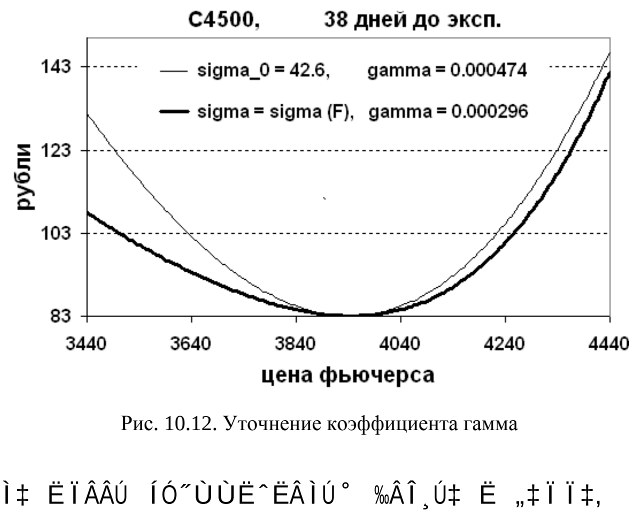


Рис. 10.12. Уточнение коэффициента гамма

Уточненный график стоимости опциона имеет коэффициенты дельта и гамма, заметно отличающиеся от рассчитанных по стандартной методике при постоянной волатильности. Это непосредственно видно на рис. 10.11, 10.12, последний из которых получен поворотом каждого из графиков рис. 10.11 относительно точки ` на угол, задаваемый соответствующим коэффициентом дельта, для получения дельта-нейтральной позиции.

Рис. 10.11, 10.12 являются результатом подстановки в метод расчета стоимости опциона аналитической аппроксимации пунктирной кривой из рис. 10.10. Коэффициент

‰ÂÎ¸Ú‡ ÏÓÊÂÚ ·˚Ú¸ ÒÌÓ„ðÂÌÚËðÓ‚‡Ì Ë ·ÓÎÂÂ ÔðÓÒÚ˚Ï ÒÔÓÒÓ·ÓÏ. ÑÎfl ˝ÚÓ„Ó ÌÂÓ·ıÓ‰ËÏÓ ð‡ÒÒ˜ËÚ‡Ú¸:

- ÒÚ‡Ì‰‡ðÚÌ˚È ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ ‰ÂÎ¸Ú‡ ‰Îfl ÔÓÒÚÓflÌÌÓÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË: $\Delta = 0.24$;
- ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ ˜Û‚ÒÚ‚ËÚÂÎ¸ÌÓÒÚË ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌ‡ Í ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË: $Vega = 4.63$;
- ÒÚÂÔÂÌ¸ Ì‡ÍÎÓÌ‡ Í‡Ò‡ÚÂÎ¸ÌÓÈ ` ` , ÚÓ˜ÍÂ 4500, ÚÓ ÂÒÚ¸ ËÁÏÂÌÂÌËÂ ÒÚÓËÏÓÒÚË ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ‚‰ÓÎ¸ ÎËÌËË ` ` ÔðË ÒÏÂ˘ÂÌËË ‚ ÚÓ˜ÍÛ 4501: $\chi = 0.015$.

ëÍÓððÂÍÚËðÓ‚‡ÌÌ˚È ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ ‰ÂÎ¸Ú‡ ‚ ˝ÚÓÏ ÒÎÛ˜‡Â ð‡‚ÂÌ:

$$\widetilde{\Delta} = \Delta - Vega * \chi = 0.24 - 4.63 * 0.015 = 0.17 \tag{10.1}$$

ê‡ÒÒÏÓÚðËÏ ÓÔËÒ‡ÌÌ˚Â ‚˚¯Â ÔðÓˆÂ‰ÛðÛ ‰ËÌ‡ÏË˜ÂÒÍÓ„Ó ıÂ‰ÊËðÓ‚‡ÌËfl ÒÍÓððÂÍÚËðÓ‚‡ÌÌ˚Ï ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚÓ‚. èðÂ‰ÔÓÎÓÊËÏ, ˜ÚÓ Ù¸˛˜Âðò Ì‡Ì‡ÎÒÚ‡ÎÓÒ¸ Ì‡ ÔðËÏÂð ÔðË ... ðËÒ. 10.8, Ë Á‡ 38 ‰ÌÂÈ ‰Ó ‰‡Ú˚ ˝ÍÒÔËð‡ˆËË ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌÓ‚ ... ÍÛÔÎÂÌÓ 100 ÓÔˆËÓÌÓ‚ ÔÓ ˆÂÌÂ ÒÚ‡ÈÍ 4500 Ë ÔðÓ‰‡ÌÓ 17 Ù¸˛˜ÂðÒÓ‚. Éð‡ÙËÍ «sigma = sigma(F)» Ì‡ ðËÒ. 10.11 Í‡Í ð‡Á ÔÓÍ‡Á˚‚‡ÂÚ ÒÚÓËÏÓÒÚ¸ ˝ÚÓÈ ÔÓÁËˆËË, ... Ç ‰‡Î¸ÌÂÈ¯ÂÏ ÔðË ËÁÏÂÌÂÌËË Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ˆÂÌ˚ Ë ˆÂÌ˚ ÓÔˆËÓÌ‡ ÂÊÂ‰ÌÂ‚ÌÓ ÓÔðÂ‰ÂÎflÂÚÒfl ÌÓ‚‡fl ÓÔˆËÓÌÌ‡fl ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸, ÔÓ ÙÓðÏÛÎÂ (10.1) ð‡ÒÒ˜ËÚ˚‚‡ÂÚÒfl ÌÓ‚˚È ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ ‰ÂÎ¸Ú‡ Ë Ù¸˛˜ÂðÒÌ‡fl ÔÓÁËˆËfl ÍÓððÂÍÚËðÛÂÚÒfl ‰Îfl ÔÓ‰‰ÂðÊ‡ÌËfl ‰ÂÎ¸Ú‡-ÌÂÈÚð‡Î¸ÌÓÒÚË. êÂÁÛÎ¸Ú‡Ú ÓÔÂð‡ˆËË ÔðË‚Â‰ÂÌ ‚ Ú‡·ÎËˆÂ 10.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ÑÌÂÈ ‰Ó ˝ÍÒÔËð‡ˆËË	ñÂÌ‡ Ù¸˛˜Âðò‡	ñÂÌ‡ ë4500	éÔˆËÓÌÌ‡fl ‚ÓÎ‡ÚËÎ. %	Î¸˛˜ÂðÒÌ‡fl ÔÓÁËˆËfl	ëÚÓËÏÓÒÚ¸ ÔÓðÚÙÂÎfl	hfì . 1	èÓ„ðÂ¯ÌÓÒÚ¸ ‰ÂÎ¸Ú‡	É‡ÏÏ‡ Ù‡ÍÚÓð	ÍÂÚ‡ Ù‡ÍÚÓð	ÇÂ„‡ Ù‡ÍÚÓð	hfì . 2	hfì. 3
38	3940	83	42.6	-17	8300	**0**		0	0	0	**0**	**0**
37	3825	68	45.4	-12	8755	**455**	1.2	196	-252	575	**519**	**1260**
36	3726	60	48.6	-10	9143	**843**	1.5	311	-492	1176	**995**	**2341**
35	3665	53	50.2	-10	9053	**753**	0.4	341	-733	1306	**914**	**2739**
34	3568	43	52.4	-8	9023	**723**	0.4	416	-969	1437	**884**	**3291**
33	3573	43	52.8	-9	8983	**683**	0.5	416	-1181	1561	**796**	**3226**
32	3635	48	52.4	-11	8925	**625**	0.7	445	-1400	1750	**795**	**2920**
31	3695	53	51.7	-12	8765	**465**	0.0	482	-1638	1767	**610**	**2520**
30	3711	52	51.6	-12	8473	**173**	0.1	486	-1897	1796	**385**	**2164**

Таблица 10.2. Динамический хедж

Ç ÍÓÎÓÌÍÂ 6 ‰‡Ì‡ ÒÚÓËÏÓÒÚ¸ ÔÓðÚÙÂÎfl Ò Û˜ÂÚÓÏ Ì‡ÍÓÔÎÂÌÌÓÈ ‚‡ðË‡ˆËÓÌÌÓÈ Ï‡ðÊË ÔÓ Ù¸˛˜Âð‡Ï. äÓÎÓÌÍ‡ 7 ÔÓÍ‡Á˚‚‡ÂÚ ËÁÏÂÌÂÌËÂ ÒÚÓËÏÓÒÚË ÔÓðÚÙÂÎfl ÔÓ ÓÚÌÓ¯ÂÌË˛ Í Ì‡˜‡Î¸ÌÓÈ. ÖÒÎË ÔÓðÚÙÂÎ¸ ‰ÂÈÒÚ‚ËÚÂÎ¸ÌÓ fl‚ÎflÂÚÒfl ‰ÂÎ¸Ú‡-ÌÂÈÚð‡Î¸Ì˚Ï, ÚÓ ËÁÏÂÌÂÌËfl Â„Ó ÒÚÓËÏÓÒÚË ÌÂ ‰ÓÎÊÌ˚ Á‡‚ËÒÂÚ¸ ÓÚ Ì‡Ôð‡‚ÎÂÌËfl ‰‚ËÊÂÌËfl ˆÂÌ˚ Ù¸˛˜Âðò‡, ‡ ÓÔðÂ‰ÂÎflÚ¸Òfl ÒÛÏÏ‡ðÌ˚Ï ‚ÎËflÌËÂÏ ÒÎÂ‰Û˛˘Ëı Ù‡ÍÚÓðÓ‚:

- «„‡ÏÏ‡-Ù‡ÍÚÓð‡» $0.5\Gamma(dF)^2$, „‰Â Γ - ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ „‡ÏÏ‡, dF - ËÁÏÂÌÂÌËÂ Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ˆÂÌ˚ Á‡ ÔÂðËÓ‰ ÏÂÊ‰Û ÂÊÂ‰ÌÂ‚Ì˚ÏË ÍÓððÂÍˆËflÏË Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ÔÓÁËˆËË; ‚ „ð‡ÙÂ 9 ˝ÚÓÚ Ù‡ÍÚÓð ‰‡Ì Ì‡ð‡ÒÚ‡˛˘ËÏ ËÚÓ„ÓÏ (‡Ì‡ÎÓ„Ë˜ÌÓ ‚ „ð‡Ù‡ı 10-13);
- «ÚÂÚ‡-Ù‡ÍÚÓð‡», ÚÓ ÂÒÚ¸ ÛÏÂÌ¸¯ÂÌËfl ÒÚÓËÏÓÒÚË ÓÔˆËÓÌ‡ Ò ÚÂ˜ÂÌËÂÏ ‚ðÂÏÂÌË, ÓÔðÂ‰ÂÎflÂÏÓ„Ó ÍÓ˝ÙÙËˆËÂÌÚ‡ÏË ÚÂÚ‡ Θ ‰Îfl Í‡Ê‰Ó„Ó ËÁ ‰ÌÂÈ (ÍÓÎÓÌÍ‡ 10);

- «,Â„‡-Ù‡ÍÚÓð‡», ÚÓ ÂÒÚ¸ ËÁÏÂÌÂÌËfl ÒÚÓËÏÓÒÚË ÔÓÁË˜ËË , Á‡,ËÒËÏÓÒÚË ÓÚ Ûðó,Ìfl ÓÔ˜ËÓÌÌÓÈ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË. ìÚÓ˜ÌÂÌÌ°È ÍÓ˝ÙÙË˜ËÂÌÚ %Â¸Ú‡ ð‡Ò˜ËÚ‡Ì Ì‡ ÎËÌÂÈÌÛ˛ Á‡,ËÒËÏÓÒÚ¸ ÓÔ˜ËÓÌÌÓÈ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ÓÚ Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ˆÂÌ° ,%ÓÎ¸ ÎËÌËË `` ðËÒ. 10.10. é‰Ì‡ÍÓ ÏÂÊ‰Û Ú‡ÍËÏ ÎËÌÂÈÌ°Ï ÔðÓ„ÌÓÁÓÏ Ë ðÂ‡Î¸ÌÓ Ì‡·Î˛‰‡ÂÏÓÈ ÓÔ˜ËÓÌÌÓÈ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸˛ ,ÓÁÌËÍ‡ÂÚ ð‡ÒÒÓ„Î‡ÒÓ,‡ÌËÂ, ,°Á,‡ÌÌÓÂ ÌÂÎËÌÂÈÌÓÒÚ¸˛ ÍðË,ÓÈ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË, ÂÂ Ó·˘ËÏË ,ÂðÚËÍ‡Î¸Ì°ÏË Ò‰,Ë„‡ÏË, ‡ Ú‡ÍÊÂ ÎÓÍ‡Î¸Ì°ÏË ÍÓÎÂ·‡ÌËflÏË , ÓÚ‰ÂÎ¸ÌÓ ,ÁflÚÓÏ ÒÚð‡ÈÍÂ. ùÚÓ ð‡ÒÒÓ„Î‡ÒÓ,‡ÌËÂ Ì‡ ÒÚð‡ÈÍÂ 4500, ÛÍ‡Á‡ÌÌÓÂ , „ð‡ÙÂ 8, %Îfl ,ÒÂı %ÌÂÈ ÓÍ‡Á‡ÎÓÒ¸ ÔÓÎÓÊËÚÂÎ¸Ì°Ï, ˜ÚÓ %‡ÎÓ ÔÓÎÓÊËÚÂÎ¸Ì°È ,ÍÎ‡‰ , ÒÚÓËÏÓÒÚ¸ ÓÔ˜ËÓÌÓ, („ð‡Ù‡ 11).

Ç %‡ÌÌÓÏ ÔðËÏÂðÂ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚ¸ Ò„Î‡ÊÂÌÌÓÈ ˆÂÌ° Ù¸˛˜Âðò‡ ÓÍ‡Á‡Î‡Ò¸ ·ÎËÁÍ‡ Í 30%, ˜ÚÓ ÏÂÌ¸¯Â ÓÔ˜ËÓÌÌ°ı ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚÂÈ , „ð‡ÙÂ 4. èÓ ˝ÚÓÈ ÔðË˜ËÌÂ „‡ÏÏ‡-Ù‡ÍÚÓð ÌÂ ÍÓÏÔÂÌÒËðÛÂÚ ÚÂÚ‡-Ù‡ÍÚÓð, Ó‰Ì‡ÍÓ ·Î‡„Ó‰‡ðfl ÔÓ,°¯ÂÌË˛ Ó·˘Â„Ó Ûðó,Ìfl ÍðË,ÓÈ ,ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ÒÛÏÏ‡ðÌ°È ËÚÓ„ ,ÒÂı ÚðÂı Ù‡ÍÚÓðÓ, ÓÍ‡Á°,‡ÂÚÒfl ÔÓÎÓÊËÚÂÎ¸Ì°Ï („ð‡Ù‡ 12). ë Û˜ÂÚÓÏ %ËÒÍðÂÚÌÓÒÚË Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ÔÓÁË˜ËË Ë ÚÓ„Ó, ˜ÚÓ Ò‡ÏË ÍÓ˝ÙÙË˜ËÂÌÚ° ˜Û,ÒÚ,ËÚÂÎ¸ÌÓÒÚË ÎË¯¸ ÔðË·ÎËÁËÚÂÎ¸ÌÓ, «, ÏÂÎÓÏ», ÓÔËÒ°,‡ÂÚ ÍÓÎÂ·‡ÌËfl ÒÚÓËÏÓÒÚË ÔÓðÚÙÂÎfl, ˜ËÒÎ‡ , ÍÓÎÓÌÍ‡ı 7 Ë 12 %ÓÒÚ‡ÚÓ˜ÌÓ ·ÎËÁÍË.

Ñ Îfl Òð‡,ÌÂÌËfl , ÔÓÒÎÂ%ÌÂÈ „ð‡ÙÂ %‡Ì° ,ÂÎË˜ËÌ°, ð‡Ò˜ËÚ‡ÌÌ°Â Ú‡Í ÊÂ, Í‡Í Ë , „ð‡ÙÂ 7, Ó‰Ì‡ÍÓ Ò ËÒÔÓÎ¸ÁÓ,‡ÌËÂÏ ÒÚ‡Ì%‡ðÚÌÓ„Ó ÍÓ˝ÙÙË˜ËÂÌÚ‡ %Â¸Ú‡. èÓÒÍÓÎ¸ÍÛ , ˝ÚÓÏ ÒÎÛ˜‡Â ÍÓðÓÚÍ‡fl ÔÓÁË˜Ëfl ÔÓ Ù¸˛˜Âð‡Ï ·ÓÎ¸¯Â (Ì‡ÔðËÏÂð, , ÔÂð,°È %ÂÌ¸ ÓÔÂð‡ˆËË ÌÂ 17, ‡ 24), ,ÓÁÌËÍ‡ÂÚ ˜Û,ÒÚ,ËÚÂÎ¸ÌÓÒÚ¸ ÔÓÁË˜ËË Í Ì‡Ôð‡,ÎÂÌË˛ %,ËÊÂÌËfl Ù¸˛˜ÂðÒÌÓÈ ˆÂÌ°. Ç %‡ÌÌÓÏ ÍÓÌÍðÂÚÌÓÏ ÔðËÏÂðÂ ˆÂÌ‡ Ù¸˛˜Âð‡ Ô‡%‡Î‡ Ë ˝ÚÓ ÔÓÎÓÊËÚÂÎ¸ÌÓ ÒÍ‡Á‡ÎÓÒ¸ Ì‡ ÒÚÓËÏÓÒÚË ÔÓðÚÙÂÎfl. é‰Ì‡ÍÓ ˆÂÎ¸˛ ÓÔÂð‡ˆËË ·°ÎÓ ÙÓðÏËðÓ,‡ÌËÂ %ÂÎ¸Ú‡-ÌÂÈÚð‡Î¸ÌÓÈ ÔÓÁË˜ËË, ·ÂÁðËÒÍÓ,ÓÈ ÔÓ ÓÚÌÓ¯ÂÌË˛ Í Ì‡Ôð‡,ÎÂÌË˛ %,ËÊÂÌËfl ˆÂÌ° Ù¸˛˜Âð‡, Ë ˝Ú‡ ˆÂÎ¸ ÌÂ ·°Î‡ %ÓÒÚË„ÌÛÚ‡. ÖÒÎË ·° Ù¸˛˜ÂðÒÌ‡fl ˆÂÌ‡ ðÓÒÎ‡, ËÎË ðÂ˜¸ ¯Î‡ Ó ÔðÓ%‡,‡ÂÏÓÈ ÓÔ˜ËÓÌÓ, Ë ÔÓÍÛÔÍÂ Ù¸˛˜ÂðÒÓ,, ÚÓ ÔÓÚÂðË ·°ÎË ·° ÒÚÓÎ¸ ÊÂ ÒÛ˘ÂÒÚ,ÂÌÌ°ÏË.

10.3. ОПЦИОННЫЕ ИНДИКАТОРЫ

Опционными индикаторами здесь названы показатели поведения рынка, рассчитанные на основе торгов опционами. Одним из них является так называемое отношение пут/колл (put/call ratio), равное

$$\frac{\textit{объем торгов по опционам пут}}{\textit{объем торгов по опционам колл}} * 100\%,$$

где объемы торгов берутся за определенный день в контрактах. На рис. 10.13 отношение пут/колл рассчитано для опционов на фьючерсы на акции РАО «ЕЭС России», там же показана цена акции. Ввиду резких колебаний значений отношения пут/колл ото дня ко дню при построении графика осуществлено сглаживание данных методом экспоненциального скользящего среднего по формуле

$$Ratio_{k+1} = \alpha * Ratio_k + (1-\alpha) * ratio_{k+1},$$

где $ratio_k$, $Ratio_k$ - отношения пут/колл до и после сглаживания, k - номер дня, $\alpha = 0.9$ - коэффициент.

В [15] отношение пут/колл отнесено к индикаторам «противоположного мнения»: отмечено, что при ожиданиях падения цены акции опционы пут начинают торговаться более активно, чем опционы колл. По мере того как падение рынка становится все более очевидным, широкая публика все активнее вовлекается в этот процесс, в результате рынок по инерции оказывается «перепродан», а отношение пут/колл достигает максимума в тот момент, когда уже пора покупать ввиду ожидаемой смены тренда. Тем самым максимум отношения пут/колл является сигналом к покупке. И наоборот, минимальное значение отношения пут/колл является сигналом к продаже.

Как показывает рис. 10.13, такие рассуждения не применимы пока к рынку опционов FORTS. Из графиков следует, что большое значение индикатора соответствует максимуму цены и тем самым скорее является сигналом к продаже, малое значение индикатора – сигналом к покупке. Эти сигналы следуют с некоторым запаздыванием ввиду сильного сглаживания индикатора, однако даже с учетом запаздывания следование сигналам этого индикатора в основном давало бы положительный результат. Одним из объяснений инверсного поведения индикатора является то обстоятельство, что на рынке опционов в настоящее время работают в основном профессионалы. Ожидания падения цены акции немедленно приводят к возрастанию отношения пут/колл, тем более значительного, чем больше ожидаемое падение, и наоборот. По мере развития рынка можно рассчитывать на то, что сглаживание будет требоваться все в меньшей степени, отставание индикатора уменьшится, при этом смысл индикатора, по-видимому, также будет постепенно модифицироваться.

Рис. 10.13. Отношение пут/колл как технический индикатор

Вопросы, связанные с опционной волатильностью как техническим индикатором, рассмотрим также на примере июньских 2002 г. фьючерсов на акции РАО «ЕЭС России» и опционов на эти фьючерсы.

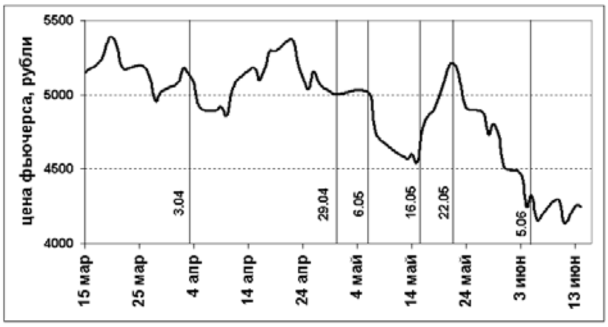


Рис. 10.14. Цена июньского фьючерса на РАО «ЕЭС России» Рис. 10.15. Волатильности

Непосредственно из графика цены фьючерса (рис. 10.14) видно, что с начала мая подвижность цены значительно выросла. На рисунке 10.15 изображены три типа волатильностей. Истинная волатильность для каждого момента времени рассчитана для временного отрезка, который остается до даты исполнения фьючерсов, по формулам (3.7), (3.8). Историческая волатильность определена по данным, которые известны на каждый текущий момент, методом *EWMA* с параметром $\alpha = 0.90$. Опционная волатильность рассчитана так же, как индикатор *VES* на рис 10.9. На основании приведенных данных можно сделать следующие выводы:

- опционная волатильность на рис. 10.15 в целом отслеживает динамику исторической волатильности, однако более консервативно реагирует на снижение исторической волатильности в марте – апреле, которое на фоне долговременных уровней волатильности (рис. 3.2, 3.3) выглядит как локальное; этот консерватизм оправдывается, поскольку в мае - июне фактическая волатильность заметно возрастает;
- опционная волатильность, как правило, оказывается ближе к истинной волатильности, чем историческая, что не удивительно, поскольку опционная волатильность сама по себе является прогнозом, учитывающим всю имеющуюся на каждый момент времени информацию. Это усредненное мнение рынка относительно того, какой будет истинная волатильность базисного актива в оставшийся до истечения срока действия опционов период.

Дополнительная информация о настроениях рынка может быть получена из кривых волатильности. В таблице 10.3 для выборочных дней приведены опционные волатильности для различных серий июньских опционов, полученные обработкой и усреднением по всем сделкам в той или иной серии, совершенным в течение дня. Хотя каждую строчку таблицы лишь условно можно назвать кривой волатильностей, она дает некоторое представление о характере торгов в указанный день. Выбранные даты отмечены на рис. 10.14 вертикальными линиями.

Дата		P 4000	C 4500	P 4500	C 4900	C 5000	P 5000	C 5100	P 5300	C 5500	P 5500	C 6000	C 6500
3 .04		42.6		37.4	37.6	39.4	36.9	38.1	33.7	35.7	34.6	45.0	46.0
6.05		41.0		38.0		36.3	35.2		27.3				
16.05			36.1	39.2		37.0	35.0			43.4		48.1	
22.05	**Утро**					38.2	34.9			50.6	45.8	58.8	
	Вечер		46.2	45.4		41.2	39.6			45.5			
5.06		64.2	64.1	55.6		70.5	60.3			84.1	81.5	98.5	

Таблица 10.3. Опционные волатильности

Первая строка таблицы соответствует периоду, когда в динамике фьючерсной цены отсутствовал резко выраженный тренд, и, соответственно, кривая волатильности имела типичную форму «*volatility smile*». Вторая строка относится ко дню, предшествовавшему резкому падению цены акции. Интересно, что хотя наблюдавшаяся до этого динамика фьючерсной цены не предвещала столь резкого движения, характер кривой волатильности показывает, что оно ожидалось. Это выражается и в отсутствии сделок по опционам с большими страйками, и в изменении формы кривой – левый край приподнят, правый опущен. Третья строка – это начало роста цены акции, и кривая волатильности демонстрирует ожидания дальнейшего роста: больше торгуются опционы колл, правый край кривой волатильности приподнят. Дата 22 мая интересна тем, что изменение настроения трейдеров произошло в течение дня: резкое падение цены перед 14:00 (рис. 10.16) привело к смещению распределения торгуемых серий опционов по страйкам и изменению формы кривой. Наконец, локальный всплеск цены 5 июня был воспринят как начало восходящего тренда после значительного падения, однако резко возросшие опционные волатильности свидетельствовали также о повышенной неуверенности трейдеров в дальнейшем развитии событий.

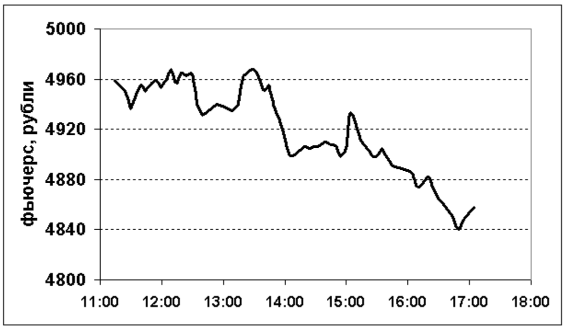


Рис. 10.16. Цена июньского фьючерса в ходе торгов 22 мая

Данный пример демонстрирует информационную ценность опционов: их премии, пересчитанные в кривую волатильности, более детально выявляют настроения рынка, чем цены базисного актива и фьючерсов. На западных рынках имеются многочисленные подтверждения того, что структура опционных премий предвещала крупные падения фондового рынка, например, в октябре 1987 года.

10.4. ПРИМЕР ДИНАМИЧЕСКОГО ХЕДЖА II

В примере динамического хеджа I (раздел 9.2) теоретические стоимости опционов и коэффициенты чувствительности рассчитывались исходя из прогнозируемого значения волатильности. Более типичные стратегии опираются на реальные цены опционов и опционные волатильности.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий получение прибыли при падении опционной волатильности. Этот пример относится к валютному рынку 1994 года, когда курс доллара был порядка 2000 рублей за доллар, и может показаться не актуальным. Но, во-первых, он иллюстрирует общие принципы, не зависящие от вида базисного актива и уровня его цены, во-вторых, хотелось бы упомянуть первую биржу в России, организовавшую торговлю опционами – ТМБ «Гермес».

На рис. 10.17 изображен график опционной волатильности на деньгах σ_0, полученный обработкой сделок на ТМБ «Гермес» в период 24.02.94 - 31.07.94.

Рис. 10.17. Опционная волатильность, опционы на курс доллара США

Этому периоду предшествовала январско-февральская нестабильность, выразившаяся в скачках курса доллара. Как видно из рисунка, в последующем произошло почти четырехкратное (в терминах опционной волатильности) успокоение рынка.

ç‡˜‡ÎÓ ÓÔÂð‡ˆËË ÔðË¡Ó‰ËÚÒfl Ì‡ 11 Ï‡ðÚ‡ 1994 „Ó‰‡, ÍÓ„‰‡ ËÏÂÌ̇ Ó , ð‡Ò˜ÂÚ ̇ ÒÌËÊÂÌËÂ ÓÔˆËÓÌ ÌÓÈ ‚ÓÎ‡ÚËÎ¸ÌÓÒÚË ·˚ÎË ÔðӉ‡Ì˚ 100 ÓÔˆËÓÌÓ, ÍÓÎÎ Ì‡ ÒÚð‡ÈÍ 1900 Ë 100 ÓÔˆËÓÌÓ, ÔÛÚ Ì‡ ÒÚð‡ÈÍ 2000 Ò Ó‰ÌÓÈ ‰‡ÚÓÈ ˝ÍÒÔËð‡ˆËË - 15 ‡ÔðÂÎfl (‰‡ÌÌ‡fl ÍÓÏ·ËÌ‡ˆËfl Ì‡Á˚‚‡ÂÚÒfl ÍÓðÓÚÍËÈ ÒÚð˝Ì„Î). Éð‡ÙËÍ ÔÓÁËˆËË ËÁÓ·ð‡ÊÂÌ Ì‡ ðËÒÛÌÍÂ 10.18.

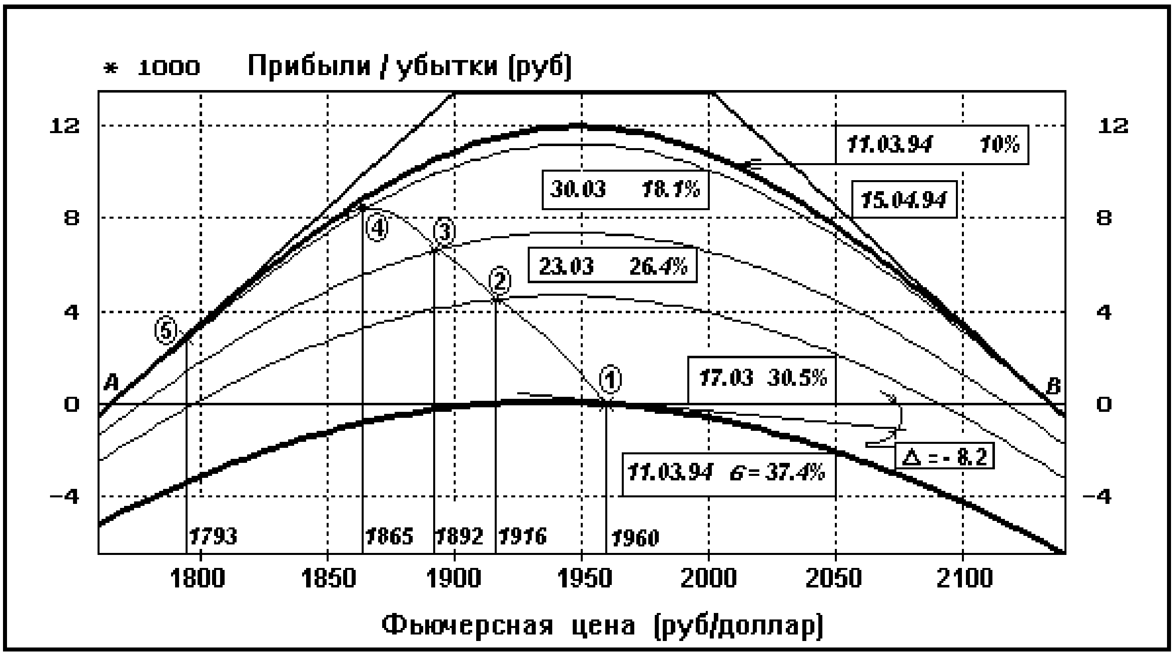


Рис. 10.18. Пример динамического хеджа II

В таблице 10.4 указаны следующие параметры:

- S - спот-курс доллара;
- F - котировка фьючерсного контракта с исполнением 15 апреля;
- C, P - реальные цены опционов колл, пут;
- $C + P$ - суммарная цена опционов;
- σ - опционная волатильность;
- Δ - коэффициент хеджа общего портфеля из опционов и фьючерсов, рассчитанный на основании опционной волатильности, до проведения очередной фьючерсной коррекции;
- I^{Φ} - открытая фьючерсная позиция после проведения очередной коррекции с целью получения Δ-нейтральной позиции относительно опционной волатильности;

- VM - денежная составляющая портфеля, равная суммарной вариационной марже (считаем, что опционы без уплаты премии).

Стоимости опционов и вариационная маржа приведены в расчете на один стрэнгл, а параметры Δ и I^{Φ} относятся к 100 комбинациям.

i	F	C	P	$C+P$	σ	Δ	I^{Φ}	Γ	Θ	Vega	VM
0	1960	122	113	235	37.4	-8.2	8	-0.0034	3.51	-4.70	0
1	1942	107	119	226	36.4	6.4	2	-0.0036	3.47	-4.57	7.56
2	1935	97	117	214	34.5	3.6	-2	-0.0039	3.33	-4.44	19.42
3	1926	86	116	202	32.4	4.2	-6	-0.0042	3.15	-4.28	31.60
4	1916	74	118	192	30.5	5.9	-12	-0.0045	2.98	-4.10	42.20
5	1902	61	122	183	28.4	8.4	-20	-0.0049	2.73	-3.85	52.88
6	1881	43	132	175	25.4	15.0	-35	-0.0052	2.28	-3.41	63.08
7	1884	45	130	175	26.3	-1.8	-33	-0.0052	2.46	-3.36	62.03
8	1892	47	123	170	26.4	-3.3	-30	-0.0054	2.59	-3.33	64.39
9	1870	35	140	175	26.2	12.6	-43	-0.0052	2.39	-2.92	59.49
10	1865	25	140	165	22.4	9.4	-52	-0.0055	1.85	-2.48	78.14
11	1863	35	147	182	29.5	-7.7	-44	-0.0049	2.85	-2.70	62.18
12	1883	33	124	157	19.1	16.5	-61	-0.0058	1.53	-2.00	78.38
13	**1865**	**15**	**136**	**151**	**18.1**	**3.0**	**-64**	**-0.0060**	**1.32**	**-1.76**	**95.36**
14	1847	13	154	167	21.3	5.8	-70	-0.0050	1.49	-1.54	90.88
15	1832	11	169	180	22.8	4.3	-74	-0.0043	1.45	-1.40	88.38
16	1830	8	170	178	22.2	5.7	-80	-0.0041	1.30	-1.05	91.86
17	1825	7	175	182	23.5	1.7	-82	-0.0038	1.35	-0.92	91.86
18	1810	4	190	194	24.1	6.1	-88	-0.0029	1.06	-0.62	92.16
19	1805	3	195	198	25.2	2.3	-90	-0.0026	1.02	-0.49	92.56
20	1800	1	200	201	22.7	5.5	-96	-0.0017	0.54	-0.24	94.06
21	1809	1	191	192	23.4	-0.7	-95	-0.0019	0.64	-0.22	94.42
22	1796	0	204	204	-	5.0	-100	-	-	-	94.47
23	1795	0	205	205	-	0.0	-100	-	-	-	94.47
24	1793	0	207	207	-	0.0	-100	-	-	-	94.47

Таблица 10.4

Опционная волатильность может определяться не только для отдельных опционов, но и для комбинаций опционов. В первой строке σ_0=37.4% - это волатильность, при которой общая теоретическая стоимость опционов колл и пут сравнивается с заданным значением 235. Нетипично высокие цены для опционов на доллар США в момент продажи опционов - порядка 40% в терминах волатильности - объясняются скачками курса доллара в период, непосредственно предшествовавший операции, и сохранявшейся в это время повышенной неопределенностью на валютном рынке. Продавцы опционов колл назначали высокие премии из опасения повторения скачков, а покупатели соглашались на эти цены именно в расчете на возможное ускорение роста курса доллара. Премии же опционов пут связаны с премиями опционов колл.

Одновременно с падением опционной волатильности наблюдалось снижение фьючерсных котировок. Рассмотрим в данной ситуации три возможных спекулятивных стратегии.

Первая заключается в пассивном ежедневном отслеживании цены стрэнгла с тем, чтобы определить момент его обратной покупки (закрытия позиций) по наименьшей цене. На рис. 10.18 линия «1-2-3-4-5» - это траектория, по которой менялась цена комбинации по мере изменения всех ценообразующих факторов - времени, фьючерсной котировки и опционной волатильности. Наилучший момент покупки, когда цена стрэнгла упала до минимального значения 151, помечен на рисунке цифрой 4, а в таблице выделен жирным шрифтом. Прибыль от всей операции на одну опционную комбинацию при этом составила

235-151=84 рубля.

Вторая стратегия является основной темой данного раздела. В этой стратегии не требуется точно прогнозировать истинную волатильность фьючерсной котировки на весь оставшийся срок существования опционов. Достаточно лишь правильно предвидеть, что истинная волатильность окажется ниже текущей опционной волатильности (или выше - тогда занимается противоположная позиция). Рассчитав в день открытия опционных позиций опционную волатильность σ_0=37.4% и коэффициент Δ_0=-8.2, необходимо купить 8 фьючерсных контрактов и тем самым занять Δ-нейтральную позицию. На следующий день опционная волатильность уменьшилась, что в сочетании с удешевлением стрэнгла из-за временного фактора привело к начислению положительной вариационной маржи по портфелю. Как всегда, вариационную маржу можно приблизительно оценить с помощью коэффициентов чувствительности:

$$\Theta_0 + \widetilde{\Delta}(F_1 - F_0) + 0.5\Gamma_0(F_1 - F_0)^2 + Vega_0(\sigma_1 - \sigma_0) =$$

=3.51+(-0.002)∗(-18)+0.5∗(-0.0034)∗18∗18+(-4.70)∗(-1)=7.58.

Здесь $\widetilde{\Delta}$ - остаточный коэффициент Δ после выравнивания опционной позиции (на одну комбинацию). Вклад второго слагаемого в общую сумму достаточно мал, кроме того, усредняется на протяжении нескольких шагов, поскольку величина $\widetilde{\Delta}$ случайно колеблется в пределах -0.005 - 0.005. Первое и третье слагаемые вместе в среднем оказываются положительными, поскольку по предположению реальная волатильность меньше опционной, а в этом случае отрицательный третий член не способен скомпенсировать положительный первый (см. (9.3)). Последний член также, как правило, положителен, поскольку опционная волатильность имеет тенденцию к уменьшению, подтягиваясь к реальной по мере успокоения рынка на фоне достаточно плавного движения курса и фьючерсных котировок.

Влияние этих двух факторов приводит к тому, что числа в последней колонке таблицы 10.4 возрастают, за исключением тех дней, когда тенденция к снижению опционной волатильности кратковременно нарушается. При этом окончательная прибыль составляет приблизительно 95 рублей на один стрэнгл.

Третья стратегия - это стратегия типа той, которая была описана в примере динамического хеджа I. Истинная волатильность фьючерсной котировки, определенная апостериори, составляет здесь всего 9%. Если 11 марта достаточно точно спрогнозировать будущую волатильность на уровне 10% (на рис. 10.18 линия «11.03.94, 10%»), исходя из этого прогноза рассчитывать коэффициент Δ и проводить ежедневные коррекции фьючерсной позиции, то получаются данные, приведенные в таблице 10.5.

i	*F*	*C*	*P*	*C+P*	$(C+P)_T$	Δ	I^{Φ}	VM
0	1960	122	113	235	114.40	-10.8	-11	0
1	1942	107	119	226	113.97	17.4	6	1.5
2	1935	97	117	214	114.62	6.6	13	1.7
3	1926	86	116	202	115.48	8.2	21	1.4
4	1916	74	118	192	117.41	9.7	31	1.3
5	1902	61	122	183	120.75	13.4	44	0.3
6	1881	43	132	175	132.00	18.3	62	2.3
7	1884	45	130	175	130.15	-2.1	60	2.3
8	1892	47	123	170	125.00	-6.4	54	1.9
9	1870	35	140	175	138.35	17.8	72	3.4
10	1865	25	140	165	140.68	5.6	78	2.1
11	1863	35	147	182	142	0.9	79	1.9
12	1883	33	124	157	127	-15.4	64	2.7
13	1865	15	136	151	140	14.4	78	4.2
14	1847	13	154	167	155	11.6	90	5.1
15	1832	11	169	180	169	6.8	97	5.6
16	1830	8	170	178	170	0.2	97	4.7
17	1825	7	175	182	175	1.0	98	4.8
18	1810	4	190	194	190	2.0	100	5.1
19	1805	3	195	198	195	0.0	100	5.1
20	1800	1	200	201	200	0.0	100	5.1
21	1809	1	191	192	191	0.0	100	5.1
22	1796	0	204	204	204	0.0	100	5.1
23	1795	0	205	205	205	0.0	100	5.1
24	1793	0	207	207	207	0.0	100	5.1

Таблица 10.5

В шестой колонке указана суммарная теоретическая стоимость опционов колл и пут, а в последней - расчетная суммарная вариационная маржа при условии, что опционы проданы за 114 и ежедневные расчетные цены опционов равны теоретическим (то есть динамический хедж моделируется аналогично таблице 9.3). Поскольку реально опционы были проданы за 235, то нетрудно убедиться, что в действительности суммарная вариационная маржа будет нарастать и к концу операции составит

$$235-114.4+5.18\cong126.$$

В той последовательности, в которой рассматривались эти три стратегии, каждая последующая давала большую прибыль, чем предыдущая, в полном соответствии со сложностью прогноза и реализации каждой из них. Это не является универсальным правилом, так как, например, при курсе на 15 апреля в диапазоне 1900-2000 первая «пассивная» стратегия закончилась бы с максимально возможной прибылью в 135 рублей на одну комбинацию.

Ко всем этим линиям поведения на рынке можно отнести следующее замечание. Лучшей стратегией считается не та, где ожидается наибольшая прибыль, а та, где лучше соотношение предполагаемой прибыли и риска потерь. В этом смысле рассмотренные стратегии высокорискованные. Количественно риск оценивается рядом локальных и глобальных параметров. К последним относятся предельные значения коэффициента дельта для очень малых и больших значений цены базисного актива. Если эти коэффициенты отрицательны, то чем они больше по абсолютной величине, тем значительнее риск потерь при резком движении цены базисного актива. Если предельное значение Δ на краях позиции равно нулю (график имеет горизонтальные «хвосты»), то можно говорить о максимальных прибылях или убытках при движении цены базисного актива в этом направлении. Локальные параметры характеризуют запас по волатильности, запас по времени и положительные интервалы цены базисного актива, в которых позиция сохраняет потенциальную прибыль. Например, при реализации третьей стратегии запас по волатильности оценивается в 37-10=27%, а положительный интервал фьючерсной котировки на начало операции ограничен точками пересечения линии теоретической стоимости «11.03.94, 10%» с горизонтальной осью (точки A, B на рис. 10.10). Влияние фактора времени в данном примере благоприятно, и говорить о запасе по времени не имеет смысла. Если бы опционы были недооценены, то следовало бы проводить операции, начинающиеся с покупки стрэнгла и т.д., и в этом случае при неизменной фьючерсной цене ожидаемая прибыль исчезла бы приблизительно через

$$(\text{ожидаемая прибыль})/|\text{тета}|\ \text{дней}.$$

Рекомендуется при достижении позиции, имеющей потенциальную прибыль, потратить часть ее для уменьшения риска. Например, в условиях рассмотренного примера наряду с продажей опционов целесообразно было бы ограничить возможные убытки покупкой сравнительно дешевых опционов колл на далеком страйке и пут на малом страйке (то есть опционов глубоко вне денег).

Выше разобраны базовые подходы к «торговле волатильностью». Более тонкие методы приходится привлекать, если в среднем кривая волатильности располагается на том же уровне, что и прогноз, и тем самым в целом запаса по волатильности нет. Эти приемы опираются на анализ формы кривой волатильности, продажу относительно переоцененных и покупку недооцененных опционов на различных страйках. Дополнительные возможности связаны с различием кривых волатильности, полученных практически одновременно, но для различных месяцев экспирации. Эта информация используется при выборе оптимальных временных спрэдов. Некоторые свойства временных спрэдов рассмотрены в следующей главе.

ГЛАВА 11. ОСНОВНЫЕ СПРЭДЫ И КОМБИНАЦИИ ОПЦИОНОВ

В разделе 2.5 упоминалось, что среди многообразия позиций выделены некоторые стандартные комбинации. В этой главе имеется возможность перечислить данные комбинации и показать динамику их стоимости во времени, используя формулу Блэка-Шоулса.

Синтетическая длинная фьючерсная позиция - это покупка опциона колл на некотором страйке E и продажа опциона пут на том же страйке. Если даны текущие цены продажи опциона колл $C_{\text{ПР}}$ и покупки опциона пут $P_{\text{ПОК}}$, то цена, по которой может быть открыта синтетическая длинная фьючерсная позиция, равняется

$$E + C_{\text{ПР}} - P_{\text{ПОК}}.$$

Добавление к купленному синтетическому фьючерсу короткой позиции по «обычному» фьючерсу дает комбинацию, называемую реверсией *(reversal).* Противоположная ей - конверсия *(conversion)* - представляет собой длинную позицию по фьючерсу и короткую по синтетическому фьючерсу. Синтетический фьючерс продается по цене $E + C_{\text{ПОК}} - P_{\text{ПР}}$. Конверсия и реверсия используются при нарушении пут-колл паритета (6.4) для получения арбитражной прибыли. Более точно, конверсия для опционов без уплаты премии оказывается прибыльной при условии $C_{\text{ПОК}} - P_{\text{ПР}} > F - E$, а реверсия - при условии $C_{\text{ПР}} - P_{\text{ПОК}} < F - E$. Для опционов с уплатой премии в правой части неравенств появляется дисконтирующий множитель e^{-rT}.

В конверсии и реверсии фьючерсная позиция иногда заменяется позицией по опциону глубоко в деньгах, график которой мало отличается от графика фьючерса (например, 4000 колл и 6000 пут на рис. 7.3, 7.4).

Синтетический фьючерс, образованный из европейских опционов с уплатой премии, в определенных обстоятельствах обладает преимуществами по сравнению с «обычным» фьючерсом. При открытии фьючерсных позиций требуется предусмотреть определенные резервные средства в рублевых или иных высоколиквидных активах на возможное погашение отрицательной вариационной маржи. Это как минимум отвлекает часть средств от более эффективного размещения и вносит элемент неопределенности в расчет доходности операции (так как размещение резервных средств, например, в ГКО может потребовать досрочной продажи ГКО на неизвестную заранее сумму), а как максимум может привести к преждевременному принудительному закрытию позиций. По синтетическому фьючерсу вариационная маржа не начисляется и не списывается по мере движения фьючерсной котировки, вместо этого меняется размер начальной маржи, которую участник торгов обязан держать на бирже или в Клиринговой палате в качестве гарантийного обеспечения по открытым позициям (начальная маржа подробно обсуждается в главе 13). Начальная маржа может быть внесена доходными ценными бумагами, принимаемыми биржей, без необходимости превращения их в рублевые средства вплоть до момента окончательного расчета на дату экспирации.

Синтетический фьючерс в такой трактовке скорее следует называть синтетическим форвардом, поскольку именно форвардный контракт предполагает исполнение или проведение единовременного денежного расчета в указанную в договоре будущую дату. Существует и отличие синтетического форварда от обычного: если покупатель форвардного контракта в период действия контракта продает такой же контракт, то он фиксирует свои прибыли или убытки как разность между ценами покупки и продажи, однако получение этой прибыли откладывается до момента исполнения контрактов всей образовавшейся цепочкой. Синтетический форвард обеспечивает механизм закрытия позиций путем совершения обратных операций по опционам колл и пут с немедленным расчетом по премиям.

В случае синтетического фьючерса, образованного американскими опционами с уплатой премии, отмеченные преимущества по составу гарантийного обеспечения ослабляются постоянно существующей возможностью досрочного исполнения опционов держателями, что повлечет за собой необходимость выплаты продавцами опционов отрицательной вариационной маржи в рублях. Если же синтетический фьючерс образован опционами без уплаты премии, то его свойства мало отличаются от обычного фьючерса.

Возможна ситуация, когда выгодным оказывается купить синтетический фьючерс, образованный опционами на одном страйке, и продать синтетический же фьючерс, образованный опционами на другом страйке. Такая комбинация называется бокс (*box* - ящик, коробка). Для опционов без уплаты премии стоимость такой позиции теоретически равна разности страйков, для опционов с уплатой премии - дисконтированной разности страйков, то есть уменьшенной на стоимость удержания позиции.

Близкой к боксу является комбинация длинной позиции по синтетическому фьючерсу с одним месяцем исполнения и короткой позиции по синтетическому фьючерсу с другим месяцем исполнения *(jelly roll).* Эта позиция напоминает обычный спрэд на фьючерсах с различными сроками исполнения. Стоимость позиции равна разности фьючерсных цен на эти месяцы поставки с учетом или без учета издержек удержания позиции в зависимости от способа расчетов по опционам.

Синтетическая длинная позиция по опциону пут образуется в результате покупки опциона колл и продажи фьючерса. Другие аналогичные комбинации получаются перестановкой членов в символическом соотношении $P=C\text{-}F$.

Позиция колл-спрэд быка *(bull call spread)* образуется при покупке опциона колл и продаже другого опциона колл на большем страйке (рис. 11.1). Такой же в общих чертах график соответствует пут-спрэду быка - продаже опциона пут и покупке опциона пут на меньшем страйке. Эти позиции являются длинными рыночными позициями ($\Delta > 0$) и оказываются прибыльными при росте фьючерсной котировки - отсюда их название. Если опционы с уплатой премии, то между двумя способами формирования позиции (на коллах или на путах) имеется существенное различие. В первом случае покупаемый колл будет дороже продаваемого, поэтому занятие такой позиции потребует уплаты разности премий – дебитный спрэд (debit spread). Во втором случае продаваемый пут будет дороже покупаемого, то есть на счет поступят средства – кредитный спрэд (credit spread).

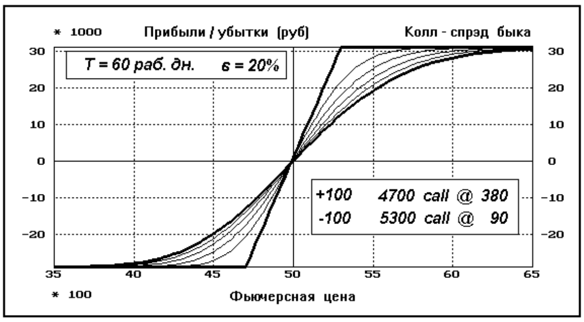


Рис. 11.1. Спрэд быка

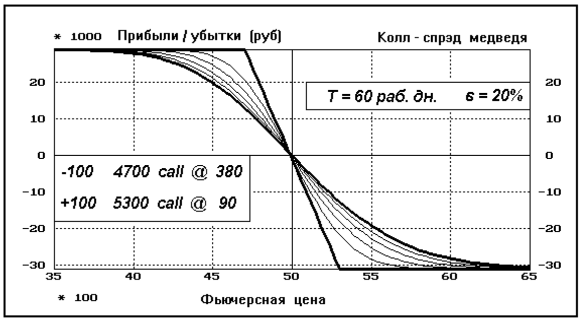


Рис. 11.2. Спрэд медведя

Если поменять в предыдущих определениях слова покупка и продажа, то соответствующие позиции будут называться колл-спрэд и пут-спрэд медведя *(bear call/put spread,* рис. 11.2).

В отличие от длинных или коротких фьючерсных позиций эти спрэды характеризуются ограниченными убытками, что достигается ценой ограничения потенциальных прибылей. Выбор между прямой фьючерсной позицией и спрэдом зависит от большей или меньшей склонности трейдера к риску, а также от рыночной ситуации.

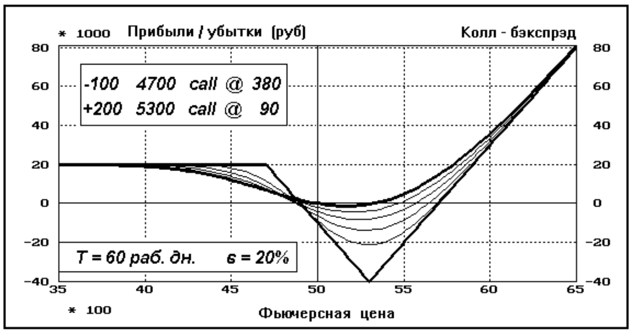


Рис. 11.3. Колл-бэкспрэд

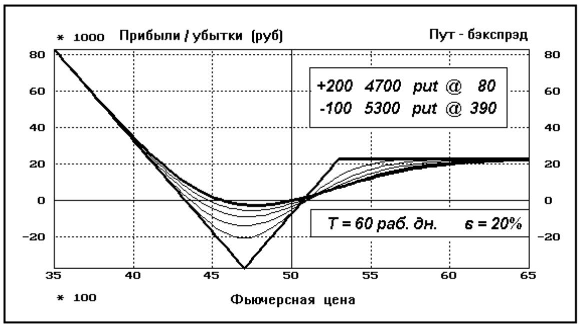


Рис. 11.4. Пут-бэкспрэд

Если модифицировать колл-спрэд медведя таким образом, что количество купленных опционов станет больше количества проданных, то такая позиция называется колл-бэкспрэд *(call backspread,* рис. 11.3). Пут-бэкспрэд изображен на рис. 11.4. Для противоположных позиций применяются специальные названия: вертикальный колл-спрэд с коэффициентом и вертикальный пут-спрэд с коэффициентом (*call vertical ratio* и *put vertical ratio).* Часто соотношение позиций обеспечивает Δ-нейтральность портфеля.

Длинный стрэдл *(straddle)* состоит из купленных в одинаковом количестве опционов колл и пут на одном страйке (рис. 11.5).

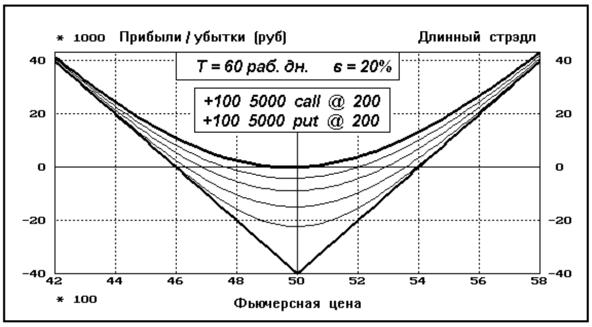


Рис. 11.5. Длинный стрэдл

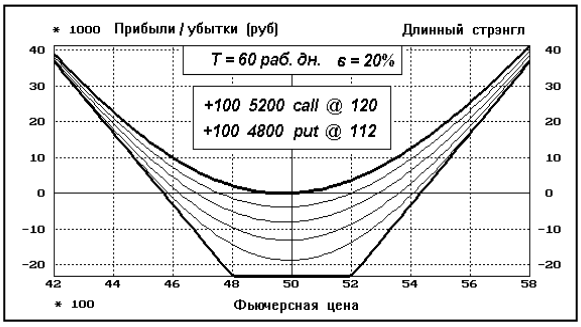


Рис. 11.6. Длинный стрэнгл

Перевернутая позиция (проданные опционы) называется короткий стрэдл.

Если куплены опционы на разных страйках, то получается стрэнгл (*strangle*, рис. 11.6). В стрэнгле, рассмотренном выше в примере динамического хеджа II, опцион колл имел меньший страйк, чем опцион пут. Такая комбинация носит специальное название *guts*.

Короткие стрэдлы и стрэнглы потенциально несут риск неограниченных убытков. На рис. 11.7 изображена длинная бабочка на опционах колл *(butterfly)*, которая характеризуется ограниченными убытками. Хотя эта позиция в средней части близка по виду к короткому стрэдлу, она является именно длинной, то есть ее открытие потребует затрат (в случае опционов с уплатой премии). Дело в том, что при фиксированной фьючерсной цене стоимости опционов в зависимости от страйка описываются выпуклой кривой - см. рис. 7.3, 7.4, и два опциона на некотором страйке стоят меньше, чем два опциона, чьи страйки расположены симметрично справа и слева. Еще одно объяснение сводится к тому, чтобы изобразить графики прибылей/убытков без сдвигов на величины премий - то есть использовать функции выплат типа изображенных на рис. 2.1 - 2.4. В этом случае суммарный график покажет ожидаемые выплаты владельцу позиции на дату экспирации опционов. Так как график целиком лежит в неотрицательной области, то за такую позицию в момент открытия необходимо платить.

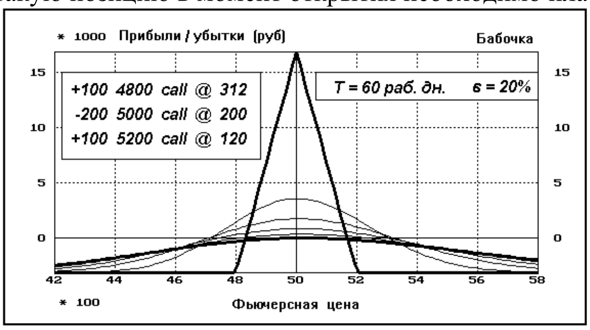


Рис. 11.7. Бабочка

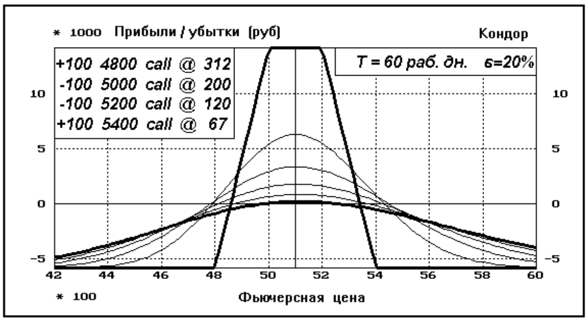


Рис. 11.8. Кондор

Контур бабочка может быть получен еще 3 способами:

1 длинный 4800 пут 2 коротких 5000 пут 1 длинный 5200 пут	1 длинный 4800 пут 1 короткий 5000 колл 1 короткий 5000 пут 1 длинный 5200 колл	1 длинный 4800 колл 1 короткий 5000 колл 1 короткий 5000 пут 1 длинный 5200 пут

► *Определить, являются ли приведенные позиции дебитными или кредитными в случае опционов с уплатой премии.*◄

На рисунке 11.8 изображен график позиции кондор. Она также может быть составлена как минимум 4 способами.

Рассмотренные выше колл и пут спрэды быка и медведя относятся к вертикальным спрэдам. Горизонтальным, временным или календарным спрэдом называется комбинация купленного и проданного опционов одного класса с одним страйком, но с разными датами экспирации. Данная терминология связана с тем, что стандартная биржевая сводка перечисляет страйки по вертикали, а месяцы экспирации - по горизонтали. Если опцион с более удаленной датой экспирации покупается, а с ближней продается, то горизонтальный спрэд является дебитным, поскольку опцион с дальней датой экспирации при прочих одинаковых параметрах - фьючерсных котировках и волатильности - стоит дороже.

Эволюция этой позиции со временем в предположении синхронного движения фьючерсных цен изображена на рис. 11.9. Возрастание стоимости спрэда в окрестности страйка объясняется тем, что проданный опцион с более коротким сроком существования быстрее теряет со временем свою стоимость. Опцион с дальним страйком сильнее реагирует на возрастание опционной волатильности, поэтому коэффициент вега этой позиции положителен и совпадает со знаком коэффициента тета. В этом состоит особенность горизонтальных спрэдов, поскольку для позиций с одной датой экспирации знаки этих коэффициентов противоположны.

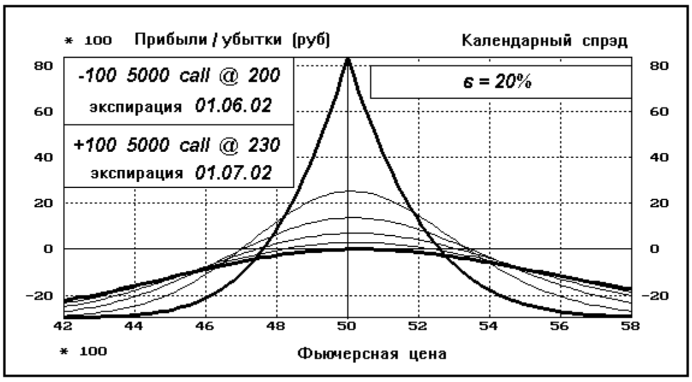


Рис. 11.9. Календарный спрэд

Использованное здесь предположение о постоянном совпадении цен фьючерсных контрактов с разными месяцами поставки как бы автоматически выполняется, если речь идет об опционах на акцию или валюту. В случае опционов на фьючерсы ситуация усложняется необходимостью учета различной динамики цен фьючерсов с разными месяцами поставки. Если в горизонтальном спрэде страйки опционов различны, то такой спрэд называется диагональным.

Перечисленные выше позиции можно строить “поэлементно”, последовательно заключая сделки по отдельным опционам. Однако распространена также торговля целыми комбинациями. Скажем, можно подать заявку на покупку 100 бабочек на страйках 4800, 5000, 5200 по цене 30.

<u>ГЛАВА 12.</u> ХЕДЖИРОВАНИЕ

12.1. ХЕДЖ С ИСПОЛНЕНИЕМ СРОЧНОГО КОНТРАКТА

Рассмотрим операции хеджирования на примере валютных срочных контрактов. Вернемся к рассуждениям, которые в разделе 4.1 были обоснованием формулы форвардного валютного курса. Предположим, что заимствованы доллары в количестве D на срок T под процент r_B, возврату подлежит сумма $De^{r_B T}$. Пусть курс доллара на момент получения займа равен S, доллары переводятся в рубли по этому курсу, а полученная сумма размещается под процент r на срок T. По истечении этого срока имеется рублевая сумма DSe^{rT}. Если курс доллара на этот момент равен S_T, то для возврата долга требуется рублевая сумма $DS_T e^{r_B T}$. Обозначим ΔR количество рублей, которое остается в результате всей операции после возврата долга (отрицательная величина означает нехватку средств):

$$\Delta R = DSe^{rT} - DS_T e^{r_B T} = De^{r_B T}(F^B - S_T),$$

где $F^B = Se^{(r - r_B)T}$ - форвардный курс (см. (4.3)). Графически зависимость ΔR от S_T изображается прямой XX на рис. 12.1. Ясно, что операция сопряжена с риском потерь, если S_T окажется выше F^B.

Для устранения данного риска применяются срочные контракты. Предположим, что одновременно с получением валютного займа заключается форвардный или фьючерсный контракт на покупку $De^{r_B T}$ долларов по цене F. На рис. 12.1 изображена линия прибылей/убытков YY этого контракта в предположении, что F меньше F^B, а $De^{r_B T} = \$1$. При этом суммарная позиция оказывается горизонтальной прямой ZZ в положительной области, то есть результатом операции является фиксированная прибыль, не зависящая от S_T. Этот вывод очевиден и без приведенного графического анализа, поскольку форвардные или фьючерсные контракты дают право конвертировать рубли по цене F. Однако разложение линии ZZ на сумму двух наклонных показывает, что операция по займу валюты и т.д. эквивалентна занятию короткой форвардной позиции со сроком исполнения T.

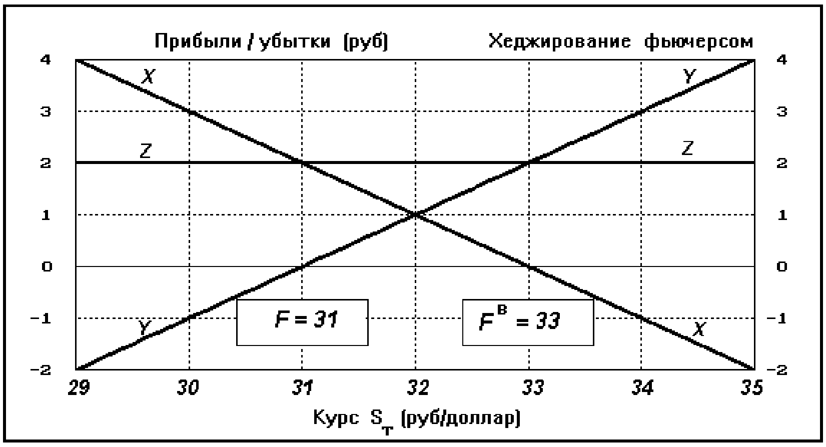


Рис. 12.1. Позиция на спот-рынке *XX* и противоположная фьючерсная *YY*

Применение срочных контрактов для устранения или уменьшения риска, связанного с неопределенностью будущих цен, а также процентных ставок, называется хеджированием. Хеджирование - это занятие на срочном рынке позиции *YY*, противоположной позиции на спот-рынке *XX*. Если бы хеджер проводил обратную операцию - заимствование рублей, конвертацию их в доллары и т.д., - то его позиция на наличном рынке была бы длинной, а для устранения риска следовало бы продавать форварды или фьючерсы.

Использование фьючерсов в данном примере действительно защищает от нежелательного роста курса доллара, однако подобно некоторым лекарствам имеет отрицательный «побочный эффект». Этот эффект проявляется при падении фьючерсной котировки и выражается в необходимости выплаты неизвестной заранее вариационной маржи. Если в некоторый момент средств на выплату маржи не окажется, то хеджерские позиции будут принудительно закрыты. Самым неблагоприятным сценарием развития событий после этого будет резкий взлет курса доллара.

Хеджирование форвардными или фьючерсными контрактами является частным случаем более сложных позиций, включающих опционы. При этом все изложенное в предыдущих главах остается в силе с тем замечанием, что в суммарные позиции необходимо включать линию прибылей/убытков на наличном рынке *XX*.

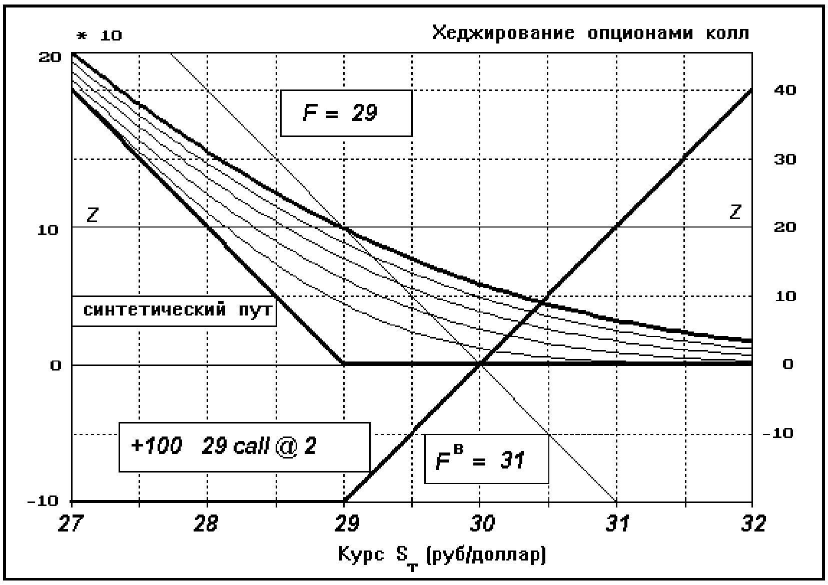


Рис. 12.2. Хеджирование опционами колл

Так, в рассмотренном примере покупка опциона колл на $De^{r_B T}$ долларов дает синтетический пут (рис. 12.2, где $De^{\,r_B T} = \$100$). Хотя эта позиция не является Δ-нейтральной ($\Delta < 0$), низший горизонтальный уровень графика на дату экспирации при этом фиксирован. В данном примере конкретные параметры произвольно выбраны такими, что этот уровень нулевой. Если для хеджа использовать опцион колл на меньшем страйке, то горизонтальный уровень окажется положительным и будет приближается к линии *ZZ* по мере снижения страйка, однако и точка излома линии выплат синтетического пута, ниже которой прибыли возрастают по отношению к минимальному уровню, будет смещаться влево. Стоит заметить, что в позициях такого рода приведенные выше методы оценки стоимости опционов, основанные на прогнозе волатильности цены базисного актива, могут дополняться или заменяться другими соображениями - а именно, приемлемости цены опциона с точки зрения доходности всей операции при реализации наихудшего сценария.

Хеджирование опционами снимает проблему риска принудительного закрытия позиций, характерную для страхования фьючерсами, поскольку средства на поддержание опционных позиций заранее известны и ограничены размером премии. Платой за это является некоторое снижение гарантированной прибыли по отношению к уровню *ZZ* (но появляется возможность и более благоприятного исхода).

Особо следует остановиться на стратегиях, которые выше были названы динамическим хеджем. В ситуации, изображенной на рис. 12.2, Δ-нейтральная позиция может быть получена покупкой соответствующего дополнительного количества фьючерсов, и тогда последующая коррекция фьючерсной позиции будет поддерживать стоимость портфеля на уровне *ZZ*. Возможен также вариант, когда опционы колл покупаются не на количество долларов $De^{r_B T}$, а на такое большее количество, при котором позиция сразу оказывается Δ-нейтральной. Если в первом или втором случаях удается купить недооцененные опционы, то такая стратегия позволяет совместить хедж и спекуляцию на волатильности и получить результат, превышающий чисто «фьючерсный».

Существует понятие «управление хеджем», которое в простейшем варианте является ничем иным как спекуляцией. Этот вариант сводится к тому, чтобы при ожидании роста или падения фьючерсной котировки отходить от Δ-нейтральности и занимать соответственно длинную или короткую суммарную позицию, тем большую, чем выше уверенность в правильности прогноза. Например, если на рис. 12.1 уменьшить количество фьючерсных позиций, возможно, до нуля, в расчете на падение фьючерсной котировки, то возникнет короткая позиция. Когда после некоторого периода движения котировки вниз наступает момент неопределенности, можно вновь купить фьючерсные контракты. Поскольку это произойдет по меньшей цене, суммарная горизонтальная позиция окажется выше первоначальной. Необходимость управления хеджем возникает также в связи с использованием опционов, так как поддержание Δ-нейтральной позиции требует коррекций позиции.

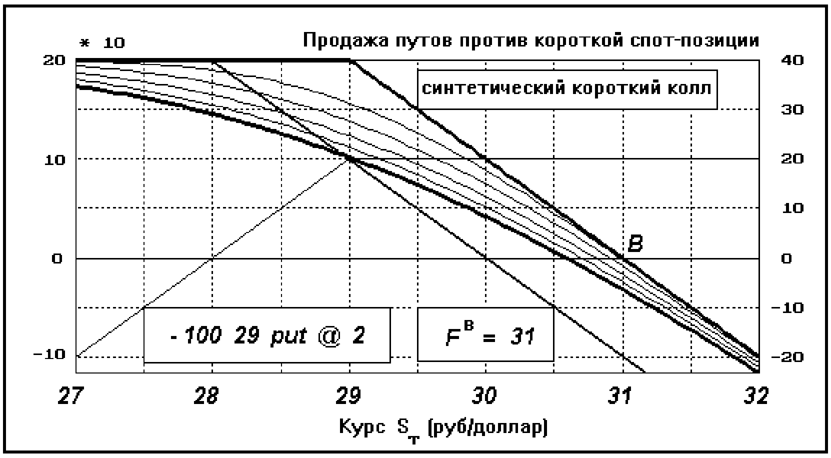


Рис. 12.3. Продажа путов против короткой спот-позиции

Следует упомянуть еще об одной распространенной стратегии при короткой позиции на наличном рынке, хотя эта стратегия и не является хеджевой - продаже опционов пут. Суммарная позиция выглядит как проданный колл (рис. 12.3). Такая позиция характерна для участников торгов, которые не ожидают существенного отклонения курса S_T от F^B и, с одной стороны, продажей опционов пут отодвигают точку безубыточности *B* вправо, с другой, стремятся увеличить прибыль от операции. Чем меньше страйк продаваемого опциона пут, тем более агрессивной считается стратегия, поскольку это увеличивает максимальную потенциальную прибыль от позиции, но уменьшает защиту от роста курса. Такая позиция покупкой фьючерсных контрактов или увеличением количества проданных путов может быть сделана Δ-нейтральной, но с отрицательной Γ и риском неограниченных убытков, что не позволяет считать ее полноценным хеджем.

Выше речь шла о комбинациях с короткой позицией на спот-рынке. Соответствующие сочетания с длинной позицией на наличном рынке получаются продажей фьючерсов, покупкой опционов пут или продажей опционов колл.

Реально хеджирование не устраняет риск полностью, а лишь уменьшает его. Например, если в данном примере используется фьючерсный контракт, то при падении фьючерсных котировок существует вероятность невозможности выплаты отрицательной вариационной маржи с принудительной ликвидацией позиций. Не исключен до конца вариант неисполнения контрактов, особенно форвардных, когда хеджер не получает того, на что рассчитывал. Если при резком скачке курса доллара вверх контрагент лишь частично оплачивает свои потери, то для спекулянта это означает недополучение выигрыша, тогда как хеджер несет убытки. Еще одна, и самая существенная, причина сохранения неопределенности относительно результата хеджирования заключается в наличии базиса.

12.2. БАЗИС

Понятие базиса было введено в разделе 4.4. Здесь оно рассматривается более подробно.

В приведенных выше примерах хеджирования фьючерсными контрактами считалось, что можно подобрать контракт, срок исполнения которого совпадает с датой возврата заимствованных средств, то есть точно соответствует потребностям хеджера. Это не всегда возможно. Более того, условия товарных фьючерсных контрактов, например, на поставку нефти, обычно оговаривают не точную дату исполнения, а некоторый интервал порядка месяца, в течение которого должна произойти поставка, причем право выбора даты поставки предоставляется продавцу. В товарных фьючерсных контрактах часто указывается вполне определенное место поставки/приема товара, которое может быть неудобным для хеджера. Может также оказаться, сорт или марка товара, с которым имеет дело хеджер, отличаются от оговоренных в спецификации биржевого фьючерсного контракта.

По этим причинам фьючерсные контракты обычно не доводятся до исполнения. Типичная схема хеджирования фьючерсами выглядит следующим образом. Предположим, что 1 сентября нефтедобывающее предприятие планирует продажу нефти 1 декабря. Для страхования от понижения цен к этому сроку 1 сентября продаются фьючерсные контракты с датой исполнения 15 декабря по цене 20 долларов за баррель. 1 декабря эти контракты закрываются по цене 16 долларов за баррель, и одновременно продается нефть на спот-рынке по цене 15 долларов за баррель. С учетом полученных на фьючерсном рынке 20-16=4 долларов за баррель фактически нефть продана по цене 15+4=19 долларов за баррель.

К этому числу можно прийти иным способом. Разность между ценой фьючерсного контракта, который предполагается использовать для проведения хеджа, и спот-ценой товара называется базисом (часто под базисом понимают противоположную величину – рекомендуется уточнять, что условлено считать базисом в том или ином случае). 1 декабря базис составил 16-15=1 доллар за баррель. Если бы еще 1 сентября удалось точно спрогнозировать базис на 1 декабря, то в начале операции можно было бы определенно утверждать, что окончательная цена нефти будет равна разности между фьючерсной ценой 1 сентября и базисом: 20-1=19.

В действительности базис заранее неизвестен, и возникающая из-за этого неопределенность в конечном результате называется риском базиса. Смысл данной схемы хеджирования заключается в том, что колебания базиса обычно существенно меньше колебаний собственно цены базисного актива, поэтому неопределенность снижается.

В первом приближении можно считать, что колебания базиса просто вносят неуправляемую составляющую в окончательный результат. На рис. 12.1 по горизонтальной оси одновременно были отложены S_T и текущая фьючерсная котировка, поскольку предполагалось, что к моменту поставки эти величины совпадут. В данной схеме хеджирования на момент окончания операции между ними остается неизвестный заранее «зазор» - базис. Если считать, что по оси отложена фьючерсная котировка, то сдвиг S_T приводит к понижению или повышению линии, изображающей короткую спот-позицию. При этом коэффициент Δ этой позиции не меняется, поэтому с точки зрения динамического хеджа стратегия остается той же.

Более сложные стратегии получаются при учете статистических взаимосвязей между ценой хеджируемого товара и фьючерсными котировками. Следующий пример демонстрирует проблемы, которые возникают при отсутствии фьючерсного контракта на актив, с которым имеет дело хеджер. В этом случае приходится использовать срочный контракт на родственный базисный актив, цена которого по возможности максимально коррелированна с ценой хеджируемого актива. Хедж, в котором базисный актив срочного инструмента отличается от реального хеджируемого актива, называется перекрестным (кросс-хеджем).

Предположим, что в конце сентября принимается решение о закупке бензина 30 ноября того же года. На рис. 12.4 изображены цены на бензин и фьючерсный контракт на нефть сорта *WTI* с окончанием торговли в конце декабря (по месяцу поставки называемый январским). Из графиков видно, что к концу сентября наметилась благоприятная тенденция падения цены на бензин, которая, однако, в первой декаде октября была нарушена. Для того, чтобы воспользоваться все еще сравнительно низкими ценами на бензин в этот период и застраховаться от возможного повышения цен в дальнейшем до уровня, при котором закупка бензина становится нерентабельной, хеджер предпринимает операции на

срочном рынке, используя ближайший январский фьючерс на нефть (контракты с более отдаленными сроками обычно менее ликвидны и слабее связаны с ценами-спот).

Ясно, что на спот-рынке хеджер занимает короткую позицию, которую графически можно изобразить аналогично линии «$F^B = 5100$» на рис. 12.1. Для определения количества покупаемых фьючерсных контрактов необходимо проанализировать, как связаны изменения цен бензина и фьючерса. Простейший способ состоит в том, чтобы по данным за предшествующий период построить так называемую линию регрессии (рис. 12.5). Каждая точка здесь соответствует паре цен {фьючерс на нефть, бензин}, а линия подбирается так, чтобы наилучшим образом «вписаться» в массив точек. Наклон этой линии приблизительно равен 2, то есть изменению цены фьючерса на нефть соответствует двукратное изменение цены бензина.

Рис. 12.4. Хеджирование операций с бензином фьючерсами на нефть

На рисунке 12.4 наряду с указанными выше реальными ценами изображена также расчетная линия “2*Нефть-Const”, получающаяся двукратным увеличением цены фьючерса на нефть («растягиванием» колебаний цены) и смещением вниз на некоторую константу, не имеющую в данном случае значения. Непосредственно из графиков видно, что покупка фьючерсных контрактов в удвоенном по отношению к объему планируемой бензиновой сделки количестве действительно компенсирует, хотя и с определенными погрешностями, последующий рост цены на бензин. Тем самым цель хеджирования достигается.

В рассмотренном примере важное значение имеет анализ динамики двумерного случайного процесса и прогнозирование в каждый текущий момент направления вектора его наиболее вероятного изменения. Для этого могут применяться и более сложные статистические методы по сравнению с описанным выше. Коэффициент хеджа подбирается так, чтобы вдоль линии наиболее вероятного изменения цен стоимость общей позиции не менялась. В любом случае найденный выше коэффициент пропорциональности между объемами позиций может пересматриваться, а это также влечет за собой необходимость управления хеджем.

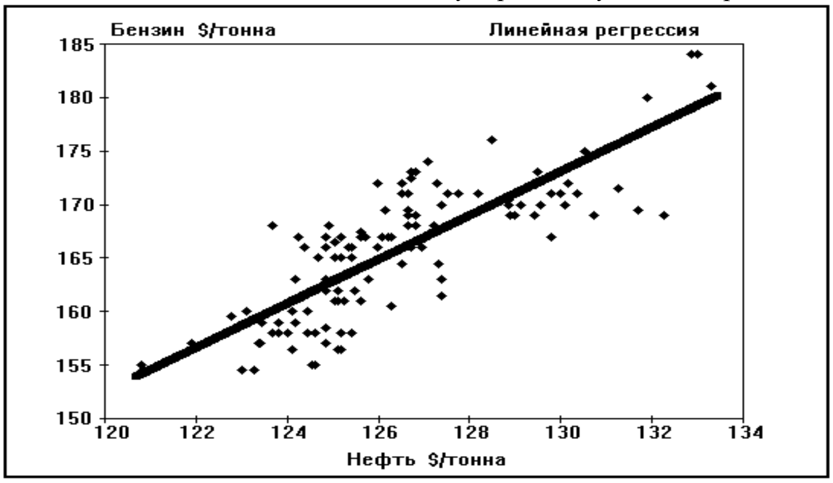


Рис. 12.5. Определение коэффициента хеджа

12.3. *EFP* - СДЕЛКИ

EFP является сокращением для *exchange of futures for physicals* и означает «обмен фьючерсов на физический товар» (употребляются также выражения *against actuals* и *versus cash*). Такие биржевые сделки получили большое распространение. Их смысл состоит в объединении положительных сторон форвардной сделки (выбор контрагента, даты и места поставки, сорта базисного актива и т.п., отсутствие базиса) с преимуществами биржевой системы гарантий, устраняющей риск контрагента.

Предположим, что поставщик и потребитель нефти 1 января договариваются о сделке на 1 июля, причем в качестве цены нефти соглашаются принять официальную расчетную цену биржи на 1 июля по фьючерсному контракту на нефть, торговля которым заканчивается 20 июля. При этом может быть дополнительно согласован фиксированный дифференциал, учитывающий отличие условий данной конкретной сделки от тех, которые указаны в спецификации биржевого фьючерсного контракта (отличие времени, места поставки, сорта нефти и другие факторы). Обычная практика сторон далее состоит в том, что в течение оставшегося срока покупатель выбирает момент, когда, по его мнению, цена данного фьючерсного контракта наименьшая, и покупает фьючерсные контракты в количестве, соответствующем объему сделки (возможно, частями и с использованием опционов колл, имея в виду их последующее досрочное исполнение). Продавец поступает аналогично, но стремится при продаже фьючерсных контрактов выбрать момент наивысших цен. Как обычно, не имеет значения, с кем именно заключаются эти сделки на бирже, и каждой из рассматриваемых сторон безразлично, в какой момент и по какой цене провела биржевую сделку другая сторона. 1 июля стороны подают на биржу уведомление о намерении провести поставку товара по *EFP*-схеме и документы, удостоверяющие их готовность к поставке и оплате (а впоследствии и документы, подтверждающие факт поставки и оплаты). При этом биржа взаимно закрывает фьючерсные позиции сторон по расчетной цене фьючерсного контракта на 1 июля.

Пример 12.1. Рассмотрим условия *EFP* - сделки, представленные в таблице 12.1.

Дифференциал: -1 $/баррель

Покупатель	Продавец
Покупает фьючерсные контракты 1 марта по цене 17 $/баррель	Продает фьючерсные контракты 1 мая по цене 20 $/баррель
Цена закрытия фьючерсного контракта 1 июля: 18 $/баррель Поставка и оплата нефти по цене 18-1=17 $/баррель	
Прибыли по фьючерсному контракту: 18-17=1 $/баррель	Прибыли по фьючерсному контракту: 20-18=2 $/баррель
Итог: покупка нефти по цене 17-1=16 $/баррель	Итог: продажа нефти по цене 17+2=19 $/баррель

Таблица 12.1. Условия *EFP*-сделки

Легко убедиться, что цены, по которым фактически покупатель оплатил, а продавец поставил нефть, не зависят от цены фьючерса 1 июля и могли быть определены еще 1 марта и 1 мая соответственно как разность цен фьючерсных контрактов и дифференциала. По этой причине сделки, проведенные 1 марта и 1 мая, называют фиксацией цены.

В общем случае действия Клиринговой палаты 1 июля в связи получением уведомления о регистрации *EFP*-сделки заключаются в открытии следующих позиций: для покупателя нефти - коротких, для продавца - длинных - по расчетной цене дня на одинаковое количество контрактов. В рассмотренном примере ввиду наличия у них предварительно открытых позиций это привело к ликвидации позиций. Однако может оказаться, что цены росли в продолжение всего полугодичного периода, тогда продавцу не имело смысла продавать фьючерсные контракты. После регистрации сделки он получает длинные позиции и по желанию может закрыть их на следующий день противоположной биржевой сделкой или спекулировать на росте цены.

Выше рассматривались варианты, когда оба контрагента выполняют свои обязательства. Если в примере 12.1 один из контрагентов 1 июля срывает исполнение контракта, то второй остается в такой же ситуации, как если бы он с самого начала проводил «самостоятельный» хедж с использованием фьючерсных контрактов. Он закрывает 1 июля фьючерсные позиции противоположной сделкой и проводит требуемую операцию на спот-рынке с некоторым другим контрагентом. При этом его риск состоит в том, что разность между ценой закрытия фьючерсных позиций и ценой сделки на спот-рынке может отличаться от 1 доллара за баррель, то есть остается риск базиса.

12.4. ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ НА ФОНДОВЫЕ ИНДЕКСЫ

Спецификация контракта

Для расчета большинства фондовых индексов используется формула:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{N} Q_i P_i}{D}, \tag{12.1}$$

где

- N - количество видов акций в базе расчета индекса;
- P_i – текущая цена акции *i*-го вида (цена последней сделки);
- Q_i – весовой коэффициент для акции *i*-го вида;
- D - постоянный коэффициент.

В основном, используются два варианта выбора весовых коэффициентов Q_i.

- Если под Q_i понимается количество акций, выпущенных *i*-ой компанией, то произведение $Q_i P_i$ является капитализацией данной компании, а индекс отслеживает динамику суммарной капитализации всех компаний, входящих в базу расчета индекса. Таким образом рассчитывается большинство фондовых индексов, включая инвестиционный индекс S&P/RUIX агентства РТС-Интерфакс (методика расчета согласована со Standard & Poor's, отсюда такое название индекса). Модификацией данного способа является учет не всего выпуска акций компании, а меньшего количества, реально находящегося в обращении *(free float)*.
- В некоторых индексах, в частности, в известных Dow Jones Industrial Average и Nikkei 225, принимается $Q_i = 1/N$, то есть индекс пропорционален среднему арифметическому цен акций.

Поправочный коэффициент D обычно представляется в виде произведения двух величин. Первая из них совпадает с числителем на момент начала расчета индекса, вторая является собственно поправочным коэффициентом. Его начальное значение часто подбирается так, чтобы стартовое значение индекса было круглым числом, например 100 или 1000. В дальнейшем корректировка коэффициента обеспечивает отсутствие скачков в индексе при изменении базы расчета индекса. Поскольку принципиально такое разделение коэффициента D на две составляющих ничего не меняет, будем в дальнейшем пользоваться сокращенной формулой (12.1).

В случае принятия решения об изменении базы расчета, начиная с некоторого дня t, в предыдущий день $t-1$ рассчитываются индекс I_{t-1} и вспомогательная величина I'_{t-1}, для определения которой используется та же формула (12.1), однако числитель берется по новой базе расчета. После этого коэффициент D корректируется умножением на отношение I'_{t-1}/I_{t-1}. В день t индекс вычисляется с новым значением поправочного коэффициента D и по новой базе расчета индекса. В последующие дни это значение коэффициента остается постоянным до следующего изменения базы расчета. Нетрудно проверить, что если цены акций в новой базе расчета в день $t-1$ и в день t одинаковы, то благодаря коррекции коэффициента D индекс в день t сохранит то же значение, что и в день $t-1$, то есть само по себе изменение базы расчета не приведет к скачку индекса.

Фьючерс на индекс котируется в терминах индекса, то есть «покупаются» и «продаются» значения индекса. Так как индекс является безразмерной величиной, то возникает вопрос: каким образом пересчитывать изменения фьючерсной цены в вариационную маржу? С этой целью задается величина минимального изменения цены фьючерса («тик») и стоимостная оценка этого тика. Например, во фьючерсе на индекс S&P/RUIX тик равен 0.05, а его стоимостная оценка составляет рублевый эквивалент 0.1 доллара США (реально расчеты осуществляются в рублях по текущему курсу ЦБ). Иначе это же можно сформулировать следующим образом: чтобы определить вариационную маржу по одной фьючерсной позиции, необходимо изменение фьючерсной цены умножить на 2 доллара. Можно также сказать, что номинальная стоимость фьючерсного контракта равна FL, где F - цена фьючерса, $L=2$ доллара (в данном примере). Еще одна интерпретация связана с фьючерсами на индивидуальные акции определенного эмитента: фьючерс на индекс имеет базисным активом условную «акцию», цена которой в долларах численно совпадает со значением индекса, при этом стандартное количество условных акций в контракте равно величине L.

Фьючерсы на индексы являются беспоставочными. Окончательный расчет производится по значению индекса, зафиксированному в указанное в спецификации время в день исполнения (часто для определения цены исполнения усредняются значения индекса за некоторый период порядка 10 мин.).

Формирование синтетической облигации

Рассмотрим вопрос о количестве фьючерсных контрактов, которое необходимо продать в целях хеджирования пакета акций (см. раздел 4.4). Начнем с частного случая, когда пакет акций включает акции всех эмитентов, входящих в базу расчета индекса, причем количества акций различных видов в пакете пропорциональны их весам Q_i в базе расчета. Будем называть такой пакет пропорциональным. Будем также предполагать, что за время существования фьючерсного контракта база индекса не меняется и по акциям не выплачиваются дивиденды.

Стоимость такого пакета повторяет динамику индекса, то есть если индекс вырос на 10%, то и стоимость пакета выросла на 10%. Обозначим

- V_0 - начальную сумму, инвестируемую в пакет акций;
- I_0 - значение индекса в день покупки пакета акций;
- I_T - значение индекса в день T,

тогда стоимость пакета акций в день T будет равна

$$V_T = V_0 \frac{I_T}{I_0}.$$

Для образования пропорционального пакета распределение инвестируемой суммы V_0 по акциям из базы расчета осуществляется в соответствии с формулой

$$m_i = \frac{V_0}{\sum_{i=1}^{N} Q_i P_i} Q_i,$$

где m_i - количество акций i – того вида в пакете.

Рассмотрим процедуру формирования синтетической облигации, дата условного «погашения» которой совпадает с датой исполнения фьючерсов на индекс. Вначале необходимо купить пропорциональный пакет акций на сумму V_0 и одновременно с этим продать фьючерсы в количестве

$$n = \frac{V_0}{I_0 L}. \tag{12.2}$$

В день исполнения фьючерсов T окончательный расчет происходит по значению индекса в этот день

$$F_{final} = I_T.$$

Суммарная вариационная маржа по n коротким позициям составит

$$n(F_0 - F_{final})L = \frac{V_0}{I_0}(F_0 - I_T) = V_0 \frac{F_0}{I_0} - V_0 \frac{I_T}{I_0}.$$

Последний член здесь есть не что иное, как стоимость пакета акций к этому моменту. Следовательно, сумма вариационной маржи и стоимости пакета не зависит от значения индекса I_T и всегда равняется

$$V_T' = V_0 \frac{F_0}{I_0}.$$

Тем самым хедж действительно обеспечивает фиксированную доходность размещения средств, определяемую соотношением между значением индекса и фьючерсной ценой.

Из полученной формулы следует, что теоретическая цена фьючерса на индекс определяется выражением

$$F_0 = I_0(1 + RT) = I_0 e^{rT}, \qquad (12.3)$$

где R, r - простая и непрерывно начисляемая безрисковые процентные ставки для периода T.

Пример 12.2. Значение индекса S&P/RUIX 16.01.02 было равно 210.37, в этот же день фьючерс на индекс с исполнением 15.03.02 торговался по 214.36. Доходность спот-фьючерс, определяемая по этим значениям, равна

$$R_F = \left(\frac{214.36}{210.27} - 1\right) * \frac{365}{58} * 100\% = 11.94\%.$$

Пусть предполагается разместить в акции $100000. В таблице 12.2 приведен состав индекса на рассматриваемый момент. Количество покупаемых акций для формирования пакета, пропорционального базе расчета, указано в последнем столбце. На практике в силу того, что акции торгуются лотами по 100 акций, полученные значения будут округлены. После приобретения пакета акций продаем фьючерсы в количестве

$$n = \frac{\$100000}{\$2 * 210.37} \cong 238.$$

N	Эмитент	Количество акций в базе расчета индекса	Цена акции 16.01.02, $	Покупаемые акции, n_i
1	РАО «ЕЭС России»	41041753984	0.16842	87394
2	Лукойл	850563255	13.7605	1811
3	Мосэнерго	28267726000	0.04564	60193
4	Ростелеком	728696320	1.00064	1552
5	Сургутнефтегаз	35725994705	0.33002	76075
6	Татнефть	2178690700	0.562	4639
7	Юкос	2236991750	5.95051	4763

Таблица 12.2. Формирование пропорционального пакета

Окончательное исполнение фьючерса осуществляется по значению индекса на 14.03.02, 18:00, равному 235.67. Соответственно, вариационная маржа по коротким позициям составит

$$238 * (214.36 - 235.67) * \$2 = -\$10143.56$$

Цена пакета акций к этому времени вырастет до

$$\$100000 * \frac{235.67}{210.27} = \$112026.43$$

С учетом вариационной маржи общая сумма составит 101882.87, что по отношению к инвестированным средствам дает доходность 12.06%. Эта величина лишь незначительно отличается от доходности, рассчитанной вначале.■

► *Чем вызвано отличие фактической доходности от планируемой?*◄

Данный пример показателен также в том смысле, что демонстрирует обратную сторону хеджирования: страхуя от падения стоимости портфеля акций, эта операция одновременно устраняет и возможности получения большей доходности в случае благоприятной динамики цен.

Синтетическая покупка акций

Аналогично формированию синтетической облигации осуществляется другая квазиарбитражная операция - синтетическая покупка пропорционального пакета акций. Предполагается, что имеется некоторая сумма V_0, инвестированная, например, в ГКО с погашением через время T и доходностью к погашению R. К моменту погашения ГКО их стоимость составит

$$V_T = V_0(1 + RT).$$

Вместо продажи пакета ГКО и покупки пакета акций достаточно, сохраняя пакет ГКО, купить фьючерсы в количестве, определяемом формулой (12.2). В итоге вариационная маржа по фьючерсам будет равна

$$n(F_{final} - F_0)L = n(I_T - F_0)L = V_0 \frac{I_T}{I_0} - V_0 \frac{F_0}{I_0}.$$

Вместе с суммой V_T, полученной от размещения с фиксированной доходностью, итог составит

$$V_T' = V_0 \frac{I_T}{I_0} + V_0(1 + RT) - V_0 \frac{F_0}{I_0}. \qquad (12.4)$$

Первое слагаемое равно результату прямого размещения суммы V_0 в пропорциональный пакет акций. Доходность синтетического способа равна

$$R_{синтетич.} = R_S + R - R_F, \qquad (12.5)$$

где

$R_S = \dfrac{1}{T} \dfrac{I_T - I_0}{I_0}$ - доходность прямого размещения в пакет акций,

$R_F = \dfrac{1}{T} \dfrac{F_T - I_0}{I_0}$ - доходность спот-фьючерс.

Произвольные пакеты акций

Реально пакет акций может быть произвольным. Один из гипотетических вариантов работы с такими пакетами мог бы состоять в том, чтобы использовать фьючерсы для каждой отдельной компоненты портфеля. Однако введение в обращение такого большого количества фьючерсов наталкивается на проблему «размывания ликвидности», а их использование затруднено необходимостью проведения многих сделок по различным фьючерсам с сопутствующими издержками. Именно поэтому мировой практикой выработан подход, в котором для работы с самыми разнообразными пакетами используются фьючерсы на индекс. При этом высокая ликвидность фьючерса оказывается важнее некоторых погрешностей хеджа, возникающих из-за неидеального отслеживания индексом динамики стоимости конкретного пакета акций, если этот пакет не является пропорциональным (*tracking error* – т.к. имеет место кросс-хедж).

В случае произвольных пакетов акций хеджевые стратегии с использованием фьючерсов на фондовый индекс учитывают коэффициенты альфа и бета α, β отдельных бумаг. Пусть $I_{-k}, I_{-k+1}, \dots I_0$ - имеющаяся запись последовательных значений индекса, взятых с определенным временным интервалом, например, в один рабочий день, $S_{-k}, S_{-k+1}, \dots S_0$ - последовательные цены анализируемой акции в те же моменты времени. Зададимся временным горизонтом T, который соответствует длительности планируемой операции (например, один месяц или 20 рабочих дней). Рассчитаем относительные приращения:

$$x_{-k} = \frac{I_{-k+T} - I_{-k}}{I_{-k}}, \qquad x_{-k+1} = \frac{I_{-k+T+1} - I_{-k+1}}{I_{-k+1}}, \dots, \qquad x_{-T} = \frac{I_0 - I_{-T}}{I_{-T}},$$

$$y_{-k} = \frac{S_{-k+T} - S_{-k}}{S_{-k}}, \qquad y_{-k+1} = \frac{S_{-k+T+1} - S_{-k+1}}{S_{-k+1}}, \dots, \qquad y_{-T} = \frac{S_0 - S_{-T}}{S_{-T}}.$$

Задача состоит в том, чтобы на основании имеющихся данных до текущего дня включительно определить коэффициенты α, β наилучшего прогноза на день T :

$$\frac{S_T - S_0}{S_0} = \frac{I_T - I_0}{I_0}\beta + \alpha + \varepsilon, \tag{12.6}$$

где ε - случайная погрешность прогнозирования, α, β - параметры, при которых СКО погрешности минимально. В этом случае количество фьючерсов, которое следует продать для фиксации будущей стоимости портфеля на день исполнения фьючерса T, равняется

$$n = \frac{V_0}{I_0 L}\beta, \tag{12.7}$$

где V_0 - текущая стоимость портфеля акций, I_0 - текущее значение индекса.

Легко проверить, что с учетом вариационной маржи пакет акций в день T будет реализован по цене V'_T, обеспечивающей доходность

$$R_{синтетич.} = \frac{1}{T}\frac{V'_T - V_0}{V_0} = \frac{\beta}{T}\frac{F_T - I_0}{I_0} + \frac{\alpha + \varepsilon}{T} \tag{12.8}$$

Таким образом, как и в случае пропорционального пакета, результат не зависит от неизвестных значений S_T, I_T. Так как, однако, имеет место кросс-хедж, возникает случайная ошибка ε.

► *Проверить соотношение (12.8).*◄

Для проведения синтетической покупки пропорционального пакета акций необходимо купить фьючерсы в том же количестве (12.7). Тогда результат операции дается следующим обобщением соотношения (12.4):

$$V'_T = V_0\frac{S_T}{S_0} + V_0\left(\beta + RT - \frac{F_0}{I_0}\beta - \alpha - \varepsilon\right) \tag{12.8}$$

Первое слагаемое является результатом прямого размещения суммы в акции, второе показывает дополнительный эффект от синтетического варианта. Обобщением соотношения (12.5) является

$$R_{синтетич} = R_S + R - \beta R_F - \frac{\alpha + \varepsilon}{T}. \tag{12.9}$$

► *Проверить соотношения (12.8), (12.9).*◄

Расчет коэффициентов α, β

Из (12.7), (12.8) следует необходимость по возможности наиболее точного подбора коэффициентов α, β с целью минимизации случайной погрешности ε. Простейший способ состоит в том, чтобы отложить на графике пары (x, y) по осям и с помощью стандартной функции *Excel* вписать в массив данных линию тренда с выводом ее уравнения на график. На рис. 12.6 показано соответствующее построение для акции Татнефть при $T = 20$ (прогноз на один месяц) по данным за период 3.01.01 – 5.06.02. Коэффициенты оказываются равны:

$$\beta = 0.844, \qquad \alpha = 0.002$$

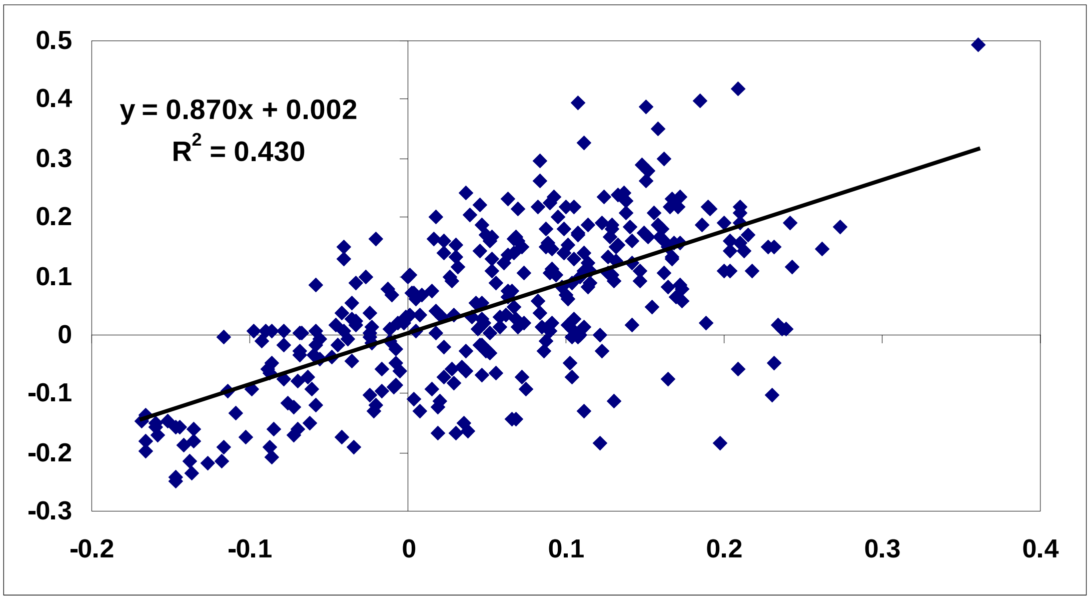


Рис. 12.6. Определение коэффициентов α, β для акций Татнефти

Одновременно на рисунке показана величина R^2, которая характеризует степень достоверности аппроксимации точек линией тренда. Чем ближе эта величина к 1, тем точнее можно спланировать результаты кросс-хеджа. В таблице для сравнения даны показатели R^2 для акций Татнефти по отношению к индексу и другим акциям, на которые введены фьючерсы, для рассматриваемой глубины прогноза $T = 20$.

	Индекс	Лукойл	Сургутнефтегаз	РАО ЕЭС	Ростелеком
R^2	0.40	0.22	0.25	0.12	0.30

Таблица 12.3. Показатели R^2 для акций Татнефти

Из таблицы следует, что использование фьючерса на индекс обеспечивает наилучший кросс-хедж.

Одной из проблем в связи с нахождением коэффициентов альфа, бета является необходимость, с одной стороны, обработки по возможности максимального объема статистических данных, с другой, учет изменения со временем динамики акций различных эмитентов и в целом отраслей, в результате чего коэффициенты не остаются постоянными. Для учета временной динамики можно применять более сложные методы оценки коэффициентов α, β. Один способов состоит в том, чтобы использовать критерий

$$\sum_{i=0}^{k} (y_i - x_i\beta - \alpha)^2 \gamma^{k-i} \to \min,$$

где γ - постоянный коэффициент, меньший или равный единице. Этот способ аналогичен экспоненциальному скользящему среднему и методу *EWMA*, описанному в разделе 3.4. Полученные в разные моменты k коэффициенты β, α при том образуют случайный процесс, который необходимо прогнозировать на Δ шагов, используя его корреляционные свойства. Коэффициент γ подбирается так, чтобы СКО погрешности прогнозирования ε в соотношении (12.6) на имеющемся статистическом материале была наименьшим.

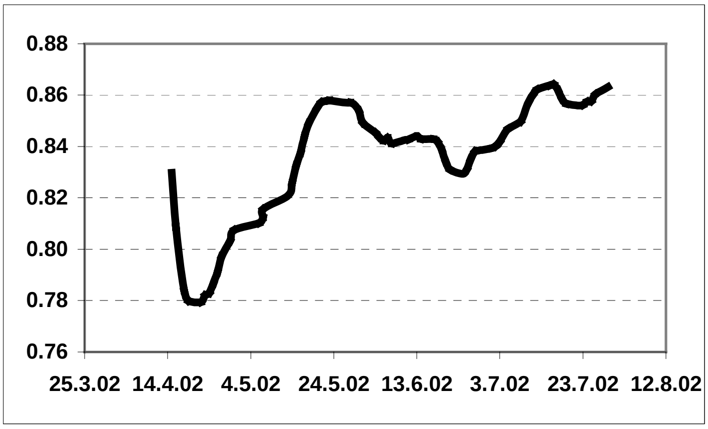


Рис. 12.7. Динамика коэффициента β для акции Татнефть

Пример «скользящего» расчета коэффициента β для акций Татнефти с глубиной окна $k = 300$ и параметрами $T = 20$ дней, $\gamma = 1$, показан на рис. 12.7.

Рис. 12.8 иллюстрирует точность кросс-хеджа. Перепишем (12.6) в терминах доходностей:

$$\frac{1}{T}\frac{S_T - S_0}{S_0} = \frac{1}{T}\frac{I_T - I_0}{I_0}\beta + \frac{\alpha + \varepsilon}{T},$$

где $T = 20/365$ - период хеджирования в долях года. На рис. 12.8 для каждой даты приведены значения каждого из трех членов этого выражения, обозначенные цифрами 1, 2, 3 соответственно. При этом коэффициент β и значения S_0, I_0 берутся на указанную дату, а S_T, I_T - для даты, отстоящей вперед на 20 рабочих дней.

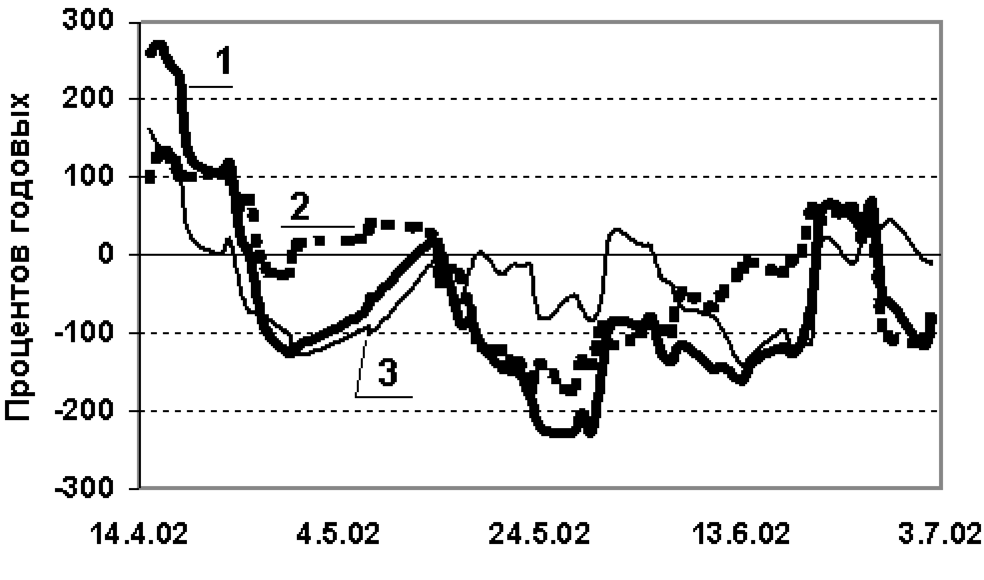


Рис. 12.8. Погрешность кросс-хеджа для акций Татнефть

Из рис. 12.8 следует, что доходности прямых операций с акциями (линия 1) имеют разброс, характеризуемый СКО=120% годовых, тогда как при использовании фьючерсов на индекс погрешность доходности (линия 3) снижается до СКО=65%. Таким образом, погрешность кросс-хеджа достаточно велика. Дополнительное уменьшение неопределенности результата может быть достигнуто за счет допущения некоторой свободы в сроках завершения операции с тем, чтобы воспользоваться благоприятной флуктуацией цен.

Еще один вывод состоит в том что коэффициент α *на порядок меньше случайной погрешности* ε, *поэтому* <u>*им можно пренебречь*</u>. *Такая ситуация достаточно типична (ср. с (3.9), где также пренебрегают средним).*

Выше описан модифицированный способ расчета коэффициентов β. Стандартный способ, обычно приводимый в литературе, состоит в расчете однодневных относительных приращений индекса и цены акции (то есть величин x_i, y_i при $T = 1$), среднеквадратических отклонений этих величин σ_x, σ_y, коэффициента корреляции ρ и $\beta = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Приведенный выше способ показывает, как можно «экспериментировать» с методикой расчета коэффициента для достижения большей точности хеджа.

Пример 12.3. Значение индекса S&P/RUIX 3.01.02 было равно 199.84, в этот же день фьючерс на индекс с исполнением 15.03.02 торговался по 200.98. Доходность спот-фьючерс, определяемая по этим значениям, равна всего $R_F = 2.93\%$, тогда как безрисковая ставка для этого периода $R = 7.5\%$. Предположим, имеется $V_0 = \$100000$, которые предполагается инвестировать в акции Татнефти. Учитывая низкий уровень фьючерсных цен по отношению к индексу, синтетическая покупка акций должна дать дополнительную доходность около $\Delta R \approx 7.5\% - 0.844 * 2.93\% = 5.0\%$. Принимается решение о синтетической покупке акций с использованием фьючерсов. На срок до 15.03.02 сумма V_0 размещается под $R = 7.5\%$, ожидаемый результат равен $V_T = \$101459$. Для хеджирования в соответствии с (12.7) покупаются фьючерсы в количестве

$$n = \frac{\$101459}{\$2 * 200.98} 0.844 \cong 211$$

Окончательный расчет по фьючерсу осуществляется по значению индекса на 15.03.02, равному 235.67, вариационная маржа равна $14639, итоговая сумма $116098, доходность операции 83%. Если бы с самого начала 03.01.02 были куплены акции, то доходность при росте цены акции с $0.525 до $0.604 была бы равна 77.4%. Хотя превышение доходности в синтетической схеме невелико (рост цены акций был значительным), оно приблизительно соответствует планировавшемуся первоначально.

Низкая доходность $R_F = 2.93\%$ в данном примере объясняется тем, что в рассматриваемый период фьючерс на индекс использовался в основном в спекулятивных целях, цена формировалась не из арбитражных соображений, и просто как прогноз динамики индекса. В некоторые периоды доходность R_F была отрицательной.■

Если портфель составлен из акций M эмитентов в количествах m_i, $i = 1,2,...,M$, причем для каждой акции известны коэффициенты α_i, β_i и текущая цена S_i, то для стоимости всего портфеля $\Pi = \sum_{i=1}^{M} \Pi_i = \sum_{i=1}^{M} m_i S_i$ получаем:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i \Delta S_i}{\Pi} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Pi_i}{\Pi} \frac{\Delta S_i}{S_i} = \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\Pi_i}{\Pi} \beta_i \right) \frac{\Delta I}{I} + \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\Pi_i}{\Pi} \alpha_i \right).$$

Выражения в скобках дают коэффициенты α, β всего портфеля.

Выше предполагалось, что по акциям не выплачиваются дивиденды. Как и в случае с фьючерсом на отдельную акцию (раздел 4.1), предположим, что известны моменты выплаты и размеры дивидендов. Если в некоторый день t_k дивиденды выплачиваются, например, по акциям с номерами 1, 5, 7, то необходимо рассчитать нормированный безразмерный дивиденд этого дня по формуле

$$\tilde{d}_k = \frac{Q_1 d_1 + Q_5 d_5 + Q_7 d_7}{D}.$$

После того, как эти величины рассчитаны для всех дней t_1, t_2, ..., t_K периода T, они пересчитываются к начальному моменту и определяется приведенное значение индекса:

$$I_0^{див} = I_0 - \frac{\tilde{d}_1}{1 + R_1 t_1} - \frac{\tilde{d}_2}{1 + R_2 t_2} - ... - \frac{\tilde{d}_K}{1 + R_K t_K}.$$

(ср. с (4.2), где использованы обычные процентные ставки). Теоретическое равновесное значение цены фьючерса на индекс дается формулой (12.3) с заменой I_0 на $I_0^{див}$.

ГЛАВА 13. ГАРАНТИЙНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

В разделе 1.2 отмечалось, что после регистрации биржевой сделки по срочным контрактам Клиринговая палата принимает на себя обязательства по исполнению условий контракта для каждой из сторон сделки, выступая в качестве покупателя для продавцов и в качестве продавца для покупателей. При этом Клиринговая палата подвергается определенному риску, так как в случае невыполнения каким-либо участником торгов своих обязательств она обязана исполнить контракты для остальных участников с убытками для себя. Например, если по итогам торгового дня вариационная маржа для некоторого участника торгов отрицательна и он не выполняет обязательство по выплате этой суммы, то у Клиринговой палаты возникает нехватка средств для выплат тем участникам, по позициям которых вариационная маржа положительна.

С целью минимизации этого риска биржа и Клиринговая палата используют систему мер, которая включает специальную структуру членства, постоянный мониторинг финансового состояния членов биржи и Клиринговой палаты, лимиты дневного изменения цены торгуемых инструментов и лимиты открытых позиций участников рынка, гарантийный и резервный фонды, а также ежедневные расчеты по так называемым нетто-обязательствам. Последние являются суммой вариационной маржи, начисленной по итогам торгового дня (см. раздел 1.3), и требования по начальной марже. Начальная маржа *(initial margin)* представляет собой возвратный взнос, который каждый участник торгов при открытии позиций по срочным контрактам обязан перечислить на счет, который открывает ему Клиринговая палата. Они остаются в собственности участника торгов и возвращаются ему в случае закрытия позиций либо исполнения контрактов, однако Клиринговая палата вправе распорядиться этими средствами в соответствии с правилами торгов и расчетов, если участник торгов не выполняет свои обязательства.

Наиболее известным способом расчета требования по начальной марже является «стандартная процедура анализа рисков портфеля» - *Standard Portfolio Analysis of Risk,* сокращенно *SPAN.* Эта система была введена в 1988 году на Чикагской товарной бирже *(CME)* и впоследствии принята на многих других биржах, к настоящему времени в Чикаго, Нью-Йорке, Лондоне, Париже, Осло, Сингапуре, Гонконге, Сиднее, Токио, Осаке, Бомбее, Виннипеге, Торонто, Будапеште.

Величина требуемой начальной маржи определяется процедурой *SPAN* из следующих соображений. Рассмотрим вначале элементарный портфель, состоящий из длинной фьючерсной позиции на поставку 1000 акций. Предположим, что по итогам дня после начисления/списания вариационной маржи сумма на счете участника торгов точно равняется требуемой начальной марже. Расчетную цену дня обозначим F_0. Пусть на следующий день расчетная цена снижается: $F_1 < F_0$. По итогам торгов отрицательная вариационная маржа $F_1 - F_0$ списывается со счета, в результате чего оставшаяся сумма оказывается меньше необходимой начальной маржи. В этом случае по правилам биржевой торговли владелец портфеля обязан до начала следующего торгового дня восстановить сумму на своем счете до требуемого минимального уровня. Если этого не происходит, то на следующей торговой сессии во избежание дальнейшего накопления убытков позиция принудительно закрывается, то есть фьючерсный контракт продается. Обычно вначале эта возможность предоставляется самому участнику, однако если в течение определенной части торговой сессии закрытия позиции не происходит, то участник отстраняется от торгов и применяются другие механизмы закрытия позиции (автоматическое формирование заявки на продажу от его имени, перенос его позиции на позиционные счета других участников по завершении торговой сессии). Пусть цена, по которой закрыта позиция, равна F_2, тогда вариационная маржа второго дня равняется $F_2 - F_1$, а суммарные убытки за два дня составляют $F_2 - F_0$.

Начальная маржа используется при таком сценарии для покрытия убытков за счет самого владельца портфеля. Ясно, что при установлении ставки начальной маржи по одной позиции следует ориентироваться на возможное изменение фьючерсной цены за два дня. С этой целью на основании исторической волатильности, опционной волатильности и других факторов прогнозируется распределение двухдневных колебаний цены и определяется интервал, в котором эти колебания будут с вероятностью 95%. Например, этот интервал может составлять ±150 рублей на контракт из 1000 акций, тогда 150 рублей задают так называемый диапазон риска по фьючерсной цене *(scan range).*

Следует обратить внимание на связь диапазона риска и временно́го интервала, по прошествии которого допускается принудительное закрытие позиций. Описанный выше временной график торгов и расчетов типичен для наших фьючерсных бирж на сегодняшний момент. На западных биржах обычно Клиринговая палата производит промежуточный расчет вариационной маржи и требований по начальной марже по крайней мере один раз в течение торговой сессии, исходя из текущих фьючерсных цен, с целью по возможности раннего выявления тех портфелей, в которых возникла нехватка средств. Если перечисления необходимых сумм в течение некоторого времени, оговоренного правилами, не происходит, то позиции закрываются в тот же день. В этом случае диапазон риска должен перекрывать только однодневное изменение цены. Именно это условие обычно указывается в описаниях процедуры *SPAN*. В дальнейшем также будем исходить из однодневного временного интервала.

При диапазоне риска 150 рублей на счете должно быть как минимум 150 рублей на каждый контракт. Если фьючерсная цена возрастает на 150 рублей, то вариационная маржа оказывается равна депонированным средствам и доходность (без пересчета в годовые) составляет 100%. Если бы операция проводилась непосредственно с акциями на наличном рынке и, например, пакет акций был куплены по цене 4000 и продан по 4150, то доходность была бы равна 150/4000≅4%. Резкое возрастание доходности или убыточности при операциях со срочными контрактами называется эффектом финансового рычага, или плечом (*leverage*).

При выборе диапазона риска Клиринговая палата учитывает, что его увеличение приводит к снижению доходности операций и, соответственно, объема биржевой торговли, а уменьшение ослабляет систему гарантий. Стабильность последней важна не только для Клиринговой палаты, но и для всех участников торгов, поскольку в критических ситуациях, возникающих при резких изменениях фьючерсной цены и дефолтах участников, проблемы с выполнением обязательств перед остальными участниками могут возникнуть и у самой Клиринговой палаты. В этом случае, как отмечалось выше, в первую очередь страдают хеджеры. В зависимости от рыночной ситуации диапазон риска время от времени пересматривается.

В случае фьючерсных контрактов начальная маржа одинакова для длинных и коротких позиций и не зависит от текущей расчетной цены, а определяется только диапазоном риска, объемом стандартного контракта (если цена и диапазон риска указываются на единицу базисного актива) и количеством открытых позиций. Иначе обстоит дело с опционами.

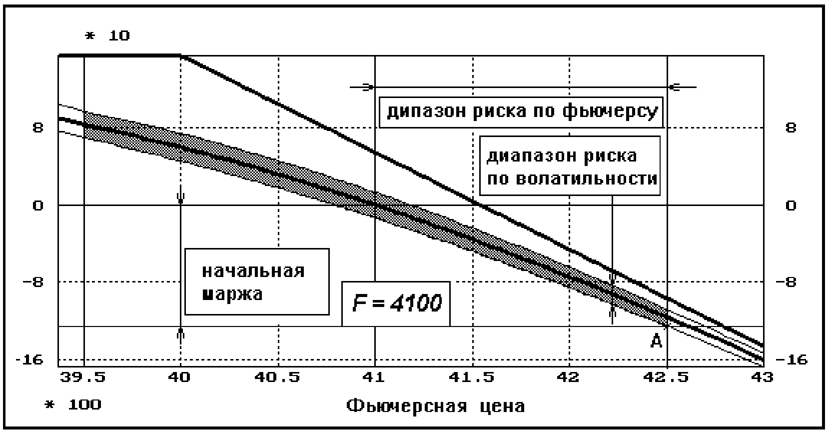


Рис. 13.1. Расчет начальной маржи по короткой опционной позиции

Рассмотрим портфель, состоящий из проданного опциона колл на фьючерс без уплаты премии (рис. 13.1). Страйковая цена опциона равна 4000, дата экспирации отстоит от текущей на месяц, текущая фьючерсная цена равна 4100, расчетная цена данного опциона по итогам торгов равна 154. Опционная волатильность, соответствующая этой цене, составляет 20%. Как и в случае фьючерсного контракта, предполагается, что к моменту принудительной ликвидации опционной позиции фьючерсная цена может оказаться в любой точке интервала

$$\{F_0 \text{ - диапазон риска, } F_0 \text{ + диапазон риска}\},$$

то есть в данном примере в любой точке интервала {3950, 4250}. Жирная плавная линия, проходящая приблизительно через ноль на текущей фьючерсной котировке F_0=4100, дает цену опциона на следующий день при условии, что опционная волатильность сохранится на прежнем уровне. Это условие, как правило, не выполняется. Анализ предыдущей динамики опционной волатильности, проводимый аналогично анализу динамики фьючерсной котировки, позволяет определить диапазон риска по волатильности. Предположим, что этот диапазон составляет 3%. Тонкие линии теоретической стоимости опциона проведены в расчете на волатильности 17% и 23%. В заштрихованную фигуру попадают цены опционов, которые считаются достаточно вероятными для того, чтобы учитывать их при выборе размера требуемой начальной маржи. Ясно, что наихудшим вариантом в данном случае является точка *A*, в которой стоимость короткой позиции достигает -277. Эта величина в данном конкретном примере называется ликвидационной стоимостью портфеля. Начальная маржа должна покрывать убытки, которые возникнут при закрытии позиции, то есть быть равной 277-154=123.

К описанной процедуре необходимо сделать два замечания. Во-первых, *SPAN* дополняет данный расчет требования по начальной марже рассмотрением возможности более резкого отклонения фьючерсной цены как в одну, так и в другую сторону. В качестве такого экстремального отклонения принимается удвоенный диапазон риска, то есть в данном примере это точки F=4400 и F=3800. Волатильность при этом в обоих сценариях берется на среднем уровне σ=20%. При реализации первого сценария стоимость короткой позиции по опциону составит -405, при реализации второго -23, соответственно уменьшение стоимости портфеля будет равно 405-277=178 и 23-277=-254 (отрицательная величина означает возрастание стоимости позиции). Поскольку данные сценарии маловероятны, то от полученных величин берется лишь определенная доля, обычно 35%. В итоге получается 0.35∗178=62 и 0.35∗(-254)=-89. Эти числа сравниваются с рассчитанным ранее значением 123, и в качестве требования по начальной марже берется большее - в данном случае сохраняется 123, то есть анализ экстремальных движений фьючерсной цены не приводит к изменению величины требуемого гарантийного обеспечения. Экстремальные сценарии оказываются наихудшими тогда, когда за пределами стандартного диапазона риска график позиции резко «падает вниз», что, естественно, сопряжено с дополнительным риском потерь.

Во-вторых, требование по гарантийному обеспечению по опционам глубоко вне денег при данной схеме может быть практически нулевым. Например, гарантийный депозит для короткой позиции по опциону колл на страйке 4500 при тех же условиях, что и выше, равен всего 9. Для того чтобы учесть риск, который несет любая короткая позиция по опциону только лишь в силу потенциальной неограниченности потерь по ней, вводится минимальный уровень начальной маржи по коротким опционным позициям. Этот уровень распространяется на все опционы данного класса независимо от срока действия и страйка. Если, например, этот уровень установлен равным 20, то по опциону на страйке 4000 депозитное требование по-прежнему останется на уровне 123, а для опциона на страйке 4500 депозит будет увеличен с 9 до 20 (пока предполагается, что других открытых позиций в портфеле, кроме единственного опциона, нет).

Изложенная процедура позволяет единообразно подходить к определению начальной маржи как по опционам, так по фьючерсам. После корректировки по рынку будущие прибыли/убытки по фьючерсной позиции изображаются линией, пересекающей горизонтальную ось в текущей расчетной цене F_0. Самая низкая точка этой линии в интервале

$$\{F_0 \text{ -диапазон риска}, \quad F_0 \text{ +диапазон риска}\}$$

дает потери ровно на величину диапазона риска. Рассмотрение экстремальных значений фьючерсной котировки, то есть крайних точек двукратного диапазона риска, при учете только 35%-ной доли потерь не приводит к изменению этого значения.

В случае портфеля, состоящего из различных открытых позиций по фьючерсам и опционам, идея сохраняется: необходимо для всего портфеля построить линии теоретической стоимости, найти низшую точку в полученной фигуре и определить наибольшие потенциальные потери. Рис. 13.2 иллюстрирует процедуру расчета начальной маржи для портфеля, состоящего из короткой позиции по опциону колл на страйке 4000 и двух длинных позиций по опциону колл на страйке 4200 при фьючерсной котировке 4200. Дата экспирации опционов отстоит на месяц. Расчетные цены опционов равны соответственно 228 и 100 рублей, опционная волатильность для этих цен составляет 20%, диапазоны риска по фьючерсной котировке и волатильности, как и выше, 150 рублей и 3%. Наиболее низкая точка в заштрихованной области соответствует фьючерсной котировке 4129 и волатильности 17%, начальная маржа при этом составляет 28.63 рублей.

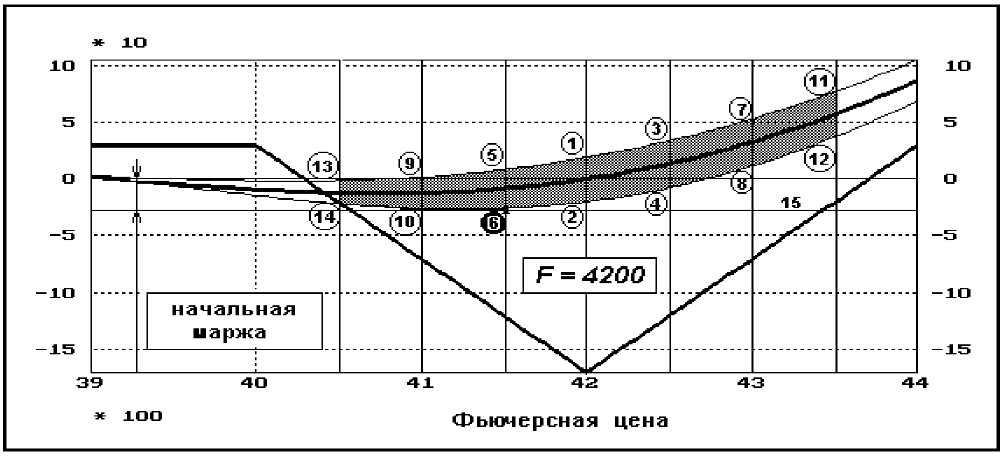


Рис. 13.2. Расчет начальной маржи для составной позиции

Реально вместо непрерывного сканирования границ заштрихованной фигуры используется более экономичная с вычислительной точки зрения приближенная процедура. Рассматриваются 14 сценариев, перечисленных в таблице 13.1 и помеченных на рис. 13.2 соответствующими числами. При описании сценариев диапазоны риска те же, что и выше: например, ΔF=-50, $\Delta\sigma$=3% означает, что фьючерсная котировка сдвигается от текущей расчетной цены вниз на 1/3 диапазона риска, а волатильность увеличивается на величину своего диапазона риска. Последние два сценария в таблице соответствуют экстремальным сдвигам фьючерсной цены.

Для каждого сценария определяются потери стоимости опционов колл на страйках 4000 и 4200 в отдельности. Отрицательная величина означает, что стоимость опциона возрастает. Для дополнительных сценариев № 15, 16 в таблице указаны 35%-ные потери. В последней колонке рассчитаны потери стоимости рассматриваемого портфеля в целом.

Наихудшим сценарием в данном примере оказывается № 6, где потери максимальны и равны 28.17. Эта величина называется риском сканирования (*scan risk).* Она несколько меньше определенной выше, но отличием пренебрегают. Для окончательного установления размера начальной маржи необходимо общее количество коротких позиций по опционам в портфеле (в данном случае одна) умножить на минимальный депозит по короткой опционной позиции: 1∗20=20. Поскольку эта величина меньше 28.17, то требование сохраняется в размере 28.17.

Клиринговая палата ежедневно формирует файл параметров риска, содержащий потери в каждом сценарии для всех торгуемых на данный момент фьючерсов и опционов, то есть столбцы типа третьего и четвертого таблицы 13.1, а также ряд других параметров. Далее определение депозита для составных позиций сводится к элементарному подсчету, реализуемому сравнительно простой программой.

Особенность опционов без уплаты премии состоит в том, что начальная маржа требуется не только по коротким опционным позициям, но и по длинным, поскольку закрытие длинной позиции по цене, меньшей последней расчетной цены опциона, влечет обязательство по уплате вариационной маржи.

№	Сценарий	- 4000C	4200C	-4000C+2∗[4200C]	
1	$\Delta F = 0$, $\Delta\sigma = 3\%$	-8.96	-12.41	8.96 - 2∗12.41	-15.86
2	$\Delta F = 0$, $\Delta\sigma = -3\%$	10.92	16.77	-10.92 + 2∗16.77	22.62
3	$\Delta F = 50$, $\Delta\sigma = 3\%$:	-49.10	-39.83	49.10 - 2∗39.83	-30.56
4	$\Delta F = 50$, $\Delta\sigma = -3\%$	-32.64	-11.10	32.64 - 2∗11.10	10.44
5	$\Delta F = -50$, $\Delta\sigma = 3\%$	28.52	11.48	-28.52 + 2∗11.48	-5.56
6	**$\Delta F = -50$, $\Delta\sigma = -3\%$**	**51.58**	**39.85**	**-51.58 + 2∗39.85**	**28.17**
7	$\Delta F = 100$, $\Delta\sigma = 3\%$	-91.50	-70.69	91.50 - 2∗70.69	-49.88
8	$\Delta F = 100$, $\Delta\sigma = -3\%$	-78.35	-43.54	78.35 - 2∗43.54	-8.73
9	$\Delta F = -100$, $\Delta\sigma = 3\%$	62.98	31.81	-62.98 + 2∗31.81	0.64
10	$\Delta F = -100$, $\Delta\sigma = -3\%$	88.63	58.21	-88.63 + 2∗58.21	27.79
11	$\Delta F = 150$, $\Delta\sigma = 3\%$	-135.76	-104.76	135.76 - 2∗104.76	-73.76
12	$\Delta F = 150$, $\Delta\sigma = -3\%$	-125.64	-80.12	125.64 - 2∗80.12	-34.60
13	$\Delta F = -150$, $\Delta\sigma = 3\%$	94.09	48.70	-94.09 + 2∗48.70	3.31
14	$\Delta F = -150$, $\Delta\sigma = -3\%$	121.40	72.16	-121.40 + 2∗72.16	22.92
15	$\Delta F = 300$, $\Delta\sigma = 0\%$	-95.90	-214.50	95.90 - 2∗214.50	-331.10
16	$\Delta F = -300$, $\Delta\sigma = 0\%$	177.60	88.76	-177.60 + 2∗88.76	0.08

Таблица 13.1

Выше предполагалось, что все открытые позиции относятся к одному месяцу экспирации. Если в портфеле содержатся открытые позиции с различными датами экспирации, то простейший вариант расчета начальной маржи состоит в том, чтобы сгруппировать позиции по месяцам экспирации, найти начальную маржу по каждому месяцу отдельно и затем сложить полученные значения. Однако, как отмечалось выше, нежелательно как завышение, так и занижение требования по начальной марже. *SPAN* более точно обрабатывает такие портфели.

Предположим, что открыты одна длинная фьючерсная позиция с поставкой в октябре и одна короткая фьючерсная позиция с поставкой в ноябре (спрэд на фьючерсах). Потенциальные потери по данной позиции зависят не от движения каждой фьючерсной цены в отдельности, а от разности этих цен, также называемой спрэдом. Обычно эти цены бывают в той или иной степени коррелированны. Анализ поведения спрэда позволяет определить его волатильность и так называемый спрэд-депозит, который также указывается в файле параметров риска. Пусть, например, спрэд-депозит равен 100 рублям, тогда по октябрьско-ноябрьскому спрэду на фьючерсах начальная маржа будет равна 100.

Если портфель состоит из открытых фьючерсных позиций:

октябрь 10, ноябрь -20, декабрь 15, январь -35,

то для расчета начальной маржи следует определить суммарное по месяцам количество длинных позиций и суммарное количество коротких позиций, в данном случае это 10+15=25 и -20-35=-55. Тогда по общему количеству (25) берется спрэд-депозит, по оставшимся 30 - обычный депозит, то есть полный депозит будет равен $25*100+30*150=7000$.

Формально процедура *SPAN* получает этот результат в два этапа, причем идея распространяется и на портфели, включающие опционы. Первый этап игнорирует то обстоятельство, что позиции относятся к различным месяцам поставки, то есть считается, что все фьючерсные котировки и волатильности будут меняться строго синхронно. При анализе сценариев прибыли/потери по длинным 25 позициям точно компенсируются прибылями/потерями по коротким 25 позициям, и только оставшиеся 30 коротких позиций влияют на риск сканирования, который оказывается равен $30*150=4500$. На втором этапе подсчитываются текущие коэффициенты Δ для каждого месяца отдельно, затем суммируются все положительные и все отрицательные Δ и из двух полученных чисел выбирается наименьшее по величине. В данном случае коэффициенты Δ просто совпадают с числом открытых позиций, и наименьшее значение равно 25. Эта величина, умноженная на спрэд-депозит, приплюсовывается к результату первого этапа. Коэффициенты Δ, используемые в этих расчетах, являются усредненными коэффициентами по позиции в пределах диапазона риска по фьючерсу. Эти коэффициенты также указываются в файле параметров риска.

Здесь приведен простейший вариант второго этапа расчетов. Более сложные учитывают порядок следования месяцев, удаленность месяцев и другие факторы.

Возможен также учет межтоварных спрэдов по фьючерсам и опционам на базисные активы, цены которых коррелированны (например, по срочным контрактам на индивидуальные акции и фондовый индекс). В этом случае, в противоположность межмесячным спрэдам, различные товары вначале обрабатываются раздельно и полученные депозиты суммируются, но затем уменьшаются на определенные величины.

Еще одно обстоятельство связано с позициями по ближайшему (поставочному) месяцу. Обычно по этим позициям требования по начальной марже увеличиваются.

На некоторых биржах для определенных категорий участников торгов и клиентов действует двухуровневая система маржевых требований. Величина, которая выше определялась как начальная маржа, при этом называется минимальным уровнем маржи или уровнем поддержания маржи *(maintenance margin).* При открытии позиций требуется внести сумму, превышающую минимальный уровень маржи на установленный процент (порядка 25%), и именно эта величина тогда называется начальной маржей. При падении суммы на счете ниже минимального уровня маржи владелец портфеля получает маржевое требование *(margin call)* и обязан восстановить сумму на счете до начальной маржи, то есть с некоторым запасом. Эта система делает маржевые требования более редкими и в большинстве случаев обеспечивает превышение средств на счете относительно минимальной маржи («подушку» - *cushion*). Свободные средства *(excess)* на маржевом счете образуются, если имеется превышение над уровнем начальной маржи, и эти средства участник торгов имеет право в любой момент снять со счета.

Следует заметить, что маржевое требование может быть получено не только в случае уменьшения средств на счете из-за списания отрицательной вариационной маржи. При наличии опционов в портфеле само требование по начальной марже является плавающей величиной, зависящей от фьючерсной цены и волатильности.

Биржевыми правилами обычно допускается, чтобы определенная доля начальной маржи была внесена ценными бумагами. Чаще всего принимаются государственные ценные бумаги и наиболее ликвидные и устойчивые акции.

Выше речь шла об опционе на фьючерс без уплаты премии. Рассмотрим опционы с уплатой премии. В этом случае по длинным позициям начальная маржа не требуется, а по коротким она должна обеспечивать возможность выкупа опциона с учетом его возможного удорожания. Так, в примере рис. 13.1 начальная маржа должна быть равна 277 рублям. В примере рис. 13.2 было определено потенциальное уменьшение стоимости портфеля в размере 28.63 рубля. Текущая стоимость портфеля по расчетным ценам составляет

–228+2*100=-28 рублей,

а ликвидационная стоимость портфеля с учетом возможного уменьшения стоимости равна

-28-28.63=-56.63 рубля.

Поскольку эта величина отрицательна (то есть для ликвидации позиций потребуются средства), то она должна быть покрыта начальной маржей.

Здесь упрощенно изложены основные идеи гарантийной системы *SPAN*, непосредственно связанные с теорией стоимости опционов, без описания многочисленных деталей и подробностей. Если говорить о системе биржевых гарантий в целом, то начальная маржа является лишь нижним этажом этой многоуровневой системы, но ее подробное освещение выходит за рамки данной книги.

SPAN был создан как компромисс между стремлением к максимально точной оценке рисков позиции и функциональной простотой. Основные расчеты проводятся Клиринговой палатой, результатом чего являются готовые наборы параметров риска, используемые затем как Клиринговой палатой, так и самими участниками торгов для оценки рисков позиций. Это позволяет с минимальными вычислительными затратами обрабатывать огромное количество позиций. Для того, чтобы оценить плюсы и минусы системы *SPAN*, целесообразно сравнить ее с подходом *Value-at-Risk (VaR)*, который в настоящее время широко применяется финансовыми институтами для оценки своих рыночных рисков и формирования резервов по их покрытию.

Проиллюстрирует идею *VaR* на том же примере составной позиции, которая изображена на рис. 13.2. Предположим, что на основании анализа предыдущей динамики цены фьючерса и опционных волатильностей σ_{4000} и σ_{4200} опционов серий 4000C и 4200C сделаны следующие выводы относительно распределений этих величин на следующий торговый день:

- цена фьючерса имеет гауссовское распределение со средним 4200 и среднеквадратическим отклонением 75;
- опционные волатильности σ_{4000} и σ_{4200} имеют двумерное гауссовское распределение со средними 20%, среднеквадратичными отклонениями 2% и корреляцией 0.80.

Далее применяется метод Монте-Карло (метод статистических испытаний) для оценки распределения стоимости портфеля на следующий день. Случайным образом генерируются значения фьючерсной котировки и волатильности. Эти величины «подаются на вход» модели, применяемой для расчета стоимости портфеля. Результирующее распределение стоимости портфеля дает наглядное представление о возможных исходах на следующий день. На рис. 13.3 показано распределение, полученное по 10000 испытаниям. Непосредственно видно, что это распределение значительно отличается от гауссовского из-за нелинейности графиков стоимости опционов. Для оценки возможных потерь задаются некоторым доверительным уровнем, скажем, 95%, и определяют порог, ниже которого стоимость портфеля оказывается в оставшихся 5% случаев. В терминологии теории вероятностей этот порог называется 5%-ной квантилью рассматриваемого распределения. В данном примере таким порогом оказывается -23.68. Эта величина и есть *VaR* портфеля в данном примере.

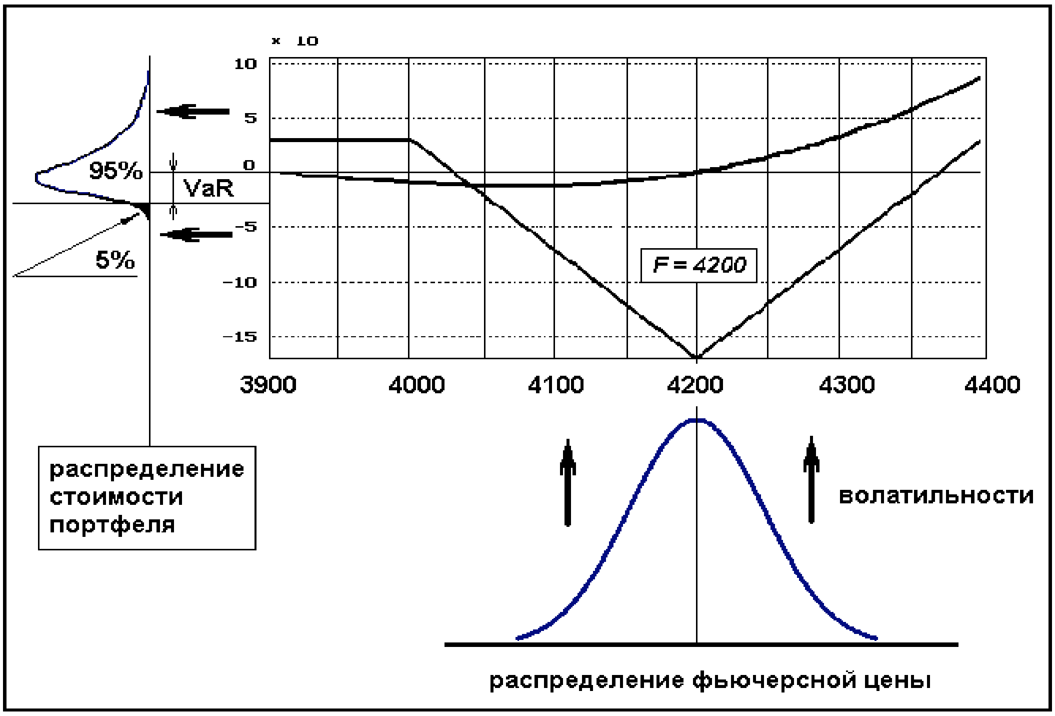


Рис. 13.3. Определение *VaR* портфеля

Универсальность и гибкость метода *VaR* заключается в том, что он позволяет учесть все особенности распределений базовых параметров (фьючерсной цены и волатильностей в данном примере). В частности, есть возможность смоделировать распределения с «тяжелыми хвостами» типа изображенной на рис. 10.3. С развитием вычислительной техники трудоемкость данного метода становится все меньшим препятствием для его применения, тогда как преимущества в логичности и точности результатов по сравнению со *SPAN* очевидны. Например, автоматически учитывается весь профиль позиции, а не только в пределах диапазона риска по фьючерсной цене, что в *SPAN* приходится компенсировать несколько искусственным введением сценариев № 15, 16 с 35%-ным учетом потерь.

В то же время *SPAN* как «инженерный подход» обеспечивает приемлемую на практике точность расчетов, поскольку начальная маржа является не единственным компонентом многоуровневой биржевой системы гарантий. Требование по начальной марже устанавливается в расчете на некоторые средние изменения рыночных параметров, тогда как на рынке могут происходить и гораздо большие колебания. В этих условиях первостепенное значение приобретает не столько точность расчета начальной маржи, сколько возможность и готовность участников торгов выплачивать потери по позициям в полном объеме.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВОДКА ФОРМУЛ

Ниже используются те же обозначения, что и в главе 6, $\phi(x)$ является функцией плотности стандартного нормального распределения:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Коэффициенты чувствительности определяются как частные производные по формуле (9.2) (то есть без нормирующих коэффициентов). Если коэффициенты для опционов колл и пут различаются, то даются два коэффициента с нижними индексами *c* или *p* соответственно.

А.1. БЕЗДИВИДЕНДНАЯ АКЦИЯ

$$C^{аес} = SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2), \qquad P^{аес} = C^{аес} + Ee^{-rT} - S,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_c = N(d_1), \qquad \Delta_p = -N(-d_1),$$

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Theta_c = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} - rEe^{-rT}N(d_2), \qquad \Theta_p = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rEe^{-rT}N(-d_2),$$

$$Vega = S\sqrt{T}\phi(d_1),$$

$$\rho_c = TEe^{-rT}N(d_2), \qquad \rho_p = -TEe^{-rT}N(-d_2).$$

Для дивидендной акции выражения $C^{аес}$, $P^{аес}$, Δ_c, Δ_p, Γ сохраняются с заменой S на $S^{див}$.

А.2. ВАЛЮТА

$$C^{вес} = Se^{-r_в T}N(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2), \quad P^{вес} = C^{вес} + Ee^{-rT} - Se^{-r_в T},$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - r_B + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - r_B - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_c = e^{-r_в T}N(d_1), \qquad \Delta_p = e^{-r_в T}N(-d_1),$$

$$\Gamma = e^{-r_в T}\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Theta_c = -e^{r_в T}\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} + r_в Se^{-r_в T}N(d_1) - rEe^{-rT}N(d_2),$$

$$\Theta_p = -e^{-r_в T}\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} - r_в Se^{-r_в T}N(-d_1) + rEe^{-rT}N(-d_2),$$

$$Vega = e^{-r_в T}S\sqrt{T}\phi(d_1),$$

$$\rho_c = TEe^{-rT}N(d_2), \qquad \rho_p = -TEe^{-rT}N(-d_2),$$

$$\rho_c^в = -TEe^{-r_в T}N(d_1), \qquad \rho_p^в = TEe^{-r_в T}N(-d_1).$$

В последних двух формулах $\rho_c^{в}$ и $\rho_p^{в}$ обозначают коэффициенты чувствительности по отношению к валютной процентной ставке $r_в$.

А.3. ОПЦИОН НА ФЬЮЧЕРС С УПЛАТОЙ ПРЕМИИ

$$C^{фес} = e^{-rT}[FN(d_1) - EN(d_2)], \quad P^{фес} = C^{фес} + e^{-rT}[E - F],$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Delta_c = e^{-rT}N(d_1), \qquad \Delta_p = -e^{-rT}N(-d_1),$$

$$\Gamma = e^{-rT}\frac{\phi(d_1)}{F\sigma\sqrt{T}},$$

$$\Theta_c = -e^{-rT}\frac{F\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rC^{фес}, \qquad \Theta_p = -e^{-rT}\frac{F\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rP^{фес},$$

$$Vega = e^{-rT}F\sqrt{T}\phi(d_1),$$

$$\rho_c = -TC^{фес}, \qquad \rho_p = -TP^{фес}.$$

А.4. ОПЦИОН НА ФЬЮЧЕРС БЕЗ УПЛАТЫ ПРЕМИИ

В выражениях раздела А.3 следует всюду положить *r*=0, за исключением ρ_c, ρ_p, которые в этом случае просто равны нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Ниже приняты следующие обозначения:

- $b=0$ для опциона на бездивидендную акцию,
- $b=r_B$ для опциона на валюту,
- $b=r$ для опциона на фьючерс с уплатой премии,

$$K = 1 - e^{-rT}, \quad M = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2(r-b)}{\sigma^2},$$

$$q_1 = 0.5\left[1 - N - \sqrt{(1-N)^2 + 4\frac{M}{K}}\right], \qquad q_2 = 0.5\left[1 - N + \sqrt{(1-N)^2 + 4\frac{M}{K}}\right].$$

Б.1. АМЕРИКАНСКИЙ ОПЦИОН КОЛЛ НА ФЬЮЧЕРС

Обозначим $h = \dfrac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + (r - b + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, U - решение уравнения

$$F - E = C^{фес}(F) - \frac{1 - e^{-bT}N[h(F)]}{q_2}F \tag{Б.1}$$

относительно переменной *F* (решение ищется численным методом), $A_2 = \dfrac{1 - e^{-bT}N[h(U)]}{q_2}U.$

Тогда $C^{фас} = F - E,$ если *F*≥*U*;

$$C^{фас}(F) = C^{фес}(F) + A_2\left[\frac{F}{U}\right]^{q_2},\ \text{если } F<U.$$

Б.2. АМЕРИКАНСКИЙ ОПЦИОН ПУТ НА ФЬЮЧЕРС

Аналогом уравнения (Б.1) в этом случае является

$$E - F = P^{фес}(F) - \frac{1-e^{-bT}N[-h(F)]}{q_1}F, \tag{Б.2}$$

решение которого относительно *F* также обозначим *U*,

$$A_1 = -\frac{1-e^{-bT}N[-h(U)]}{q_1}U.$$

Тогда $P^{фес} = E - F$, если *F<U*, $P^{фас}(F) = P^{фес}(F) + A_1\left[\frac{F}{U}\right]^{q_1}$, если *F≥U*.

Б.3. АМЕРИКАНСКИЕ ОПЦИОНЫ НА БЕЗДИВИДЕНДНУЮ АКЦИЮ И ВАЛЮТУ

Все выражения аналогичны выражениям пп. Б.1, Б.2 с тем замечанием, что следует исключить из рассмотрения опцион колл на бездивидендную акцию, стоимость которого не отличается от стоимости европейского опциона (в этом случае уравнение (Б.1) не имеет решения).

ЛИТЕРАТУРА

1. FORTS – фьючерсы и опционы в РТС. Методическое пособие.
2. А.Н. Буренин. Рынки производных финансовых документов. Москва, ИНФРА-М, 1996.
3. А.В. Васютович, Ю.Н. Сотникова. Рыночный риск: измерение и управление. Банковские Технологии, N1, 1998.
4. Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском. М., «ТВП». 1996.
5. Колб Р.У. Финансовые деривативы. Москва, Филинъ, 1997.
6. Маршалл Д.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия: Полное руководство по финансовым нововведениям. Москва, ИНФРА-М, 1998.
7. Чекулаев М. Загадки и тайны опционной торговли. ИК Аналитика, 2001.
8. Bookstaber R. Option Pricing and Strategies in Investing, 1981.
9. Clewlow L., Strickland C. Implementing Derivatives Models. Chichester, John Wiley and Sons, 1998.
10. Cox J.C., Rubinstein M. Options Markets. NJ, Pentice-Hall, 1985.
11. Gemill G. Option Pricing: an International Perspective. McGraw-Hill, 1993.
12. Hull J. Options, Futures and Other derivatives. NJ, Prentice-Hall, 2000.
13. Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. Irwin, 2000.
14. Kolb R. Futures, Options, and Swaps. NY, Blackwell, 1999.
15. McMillan L. McMillan on Options, NY, John Wiley & Sons, 1996.
16. Natenberg S. Option Volatility and Pricing Strategies: Advanced Trading Techniques for Professionals. Chicago, Probus, 1994.
17. Nelken I., ed. The Handbook of Exotic Options. NY, McGraw-Hill, 1996.
18. An Overview of SPAN: The Standard Portfolio Analysis of Risk system for calculating Performance Bond Requirements. The Chicago Mercantile Exchange. Интернет-сайт CME www.cme.com.

СОДЕРЖАНИЕ